



# Fluctuations temporelles quantiques du courant dans des nanostructures

Laurent Saminadayar

## ► To cite this version:

Laurent Saminadayar. Fluctuations temporelles quantiques du courant dans des nanostructures. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paris Sud - Paris XI, 1997. Français. NNT: . tel-00006368

**HAL Id: tel-00006368**

**<https://theses.hal.science/tel-00006368>**

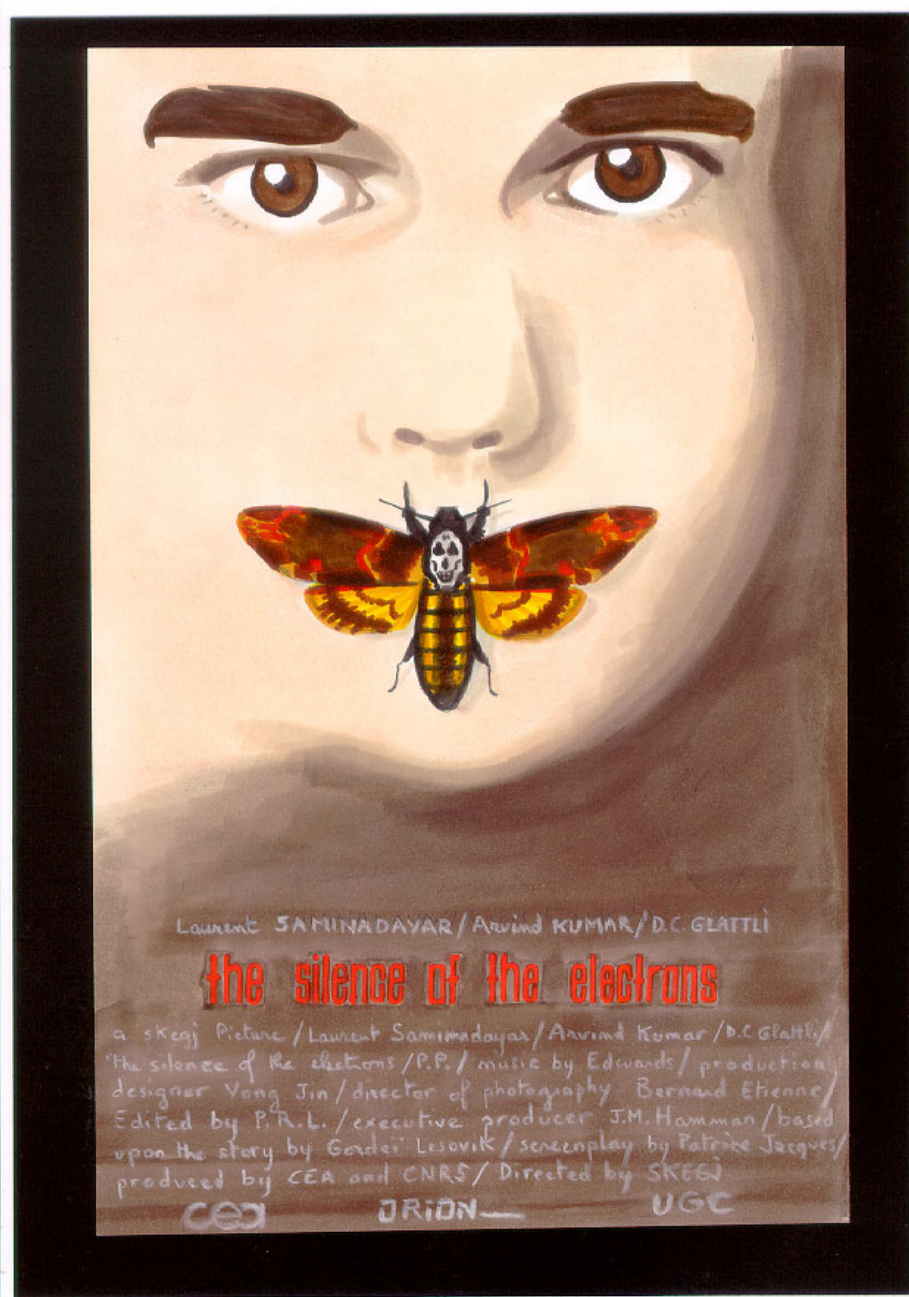
Submitted on 5 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laurent SAMINADAYAR

**FLUCTUATIONS TEMPORELLES  
QUANTIQUES DU COURANT DANS DES  
NANOSTRUCTURES**



# Table des matières

## I Généralités sur le transport dans les systèmes mésoscopiques 13

<b>1</b>	<b>Système expérimental</b>	<b>15</b>
1.1	L'échelle mésoscopique . . . . .	15
1.2	Le gaz d'électrons bidimensionnel . . . . .	17
1.2.1	Différents systèmes expérimentaux . . . . .	17
1.2.2	L'hétérojonction GaAs/AlGaAs . . . . .	18
1.3	La lithographie . . . . .	20
1.3.1	La gravure du méso . . . . .	21
1.3.2	Les contacts ohmiques . . . . .	21
1.3.3	La technique de la “ grille fendue ” . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Transport quantique : le cas du régime balistique</b>	<b>25</b>
2.1	Mécanismes de diffusion des électrons dans un solide . . . . .	25
2.2	Le transport classique . . . . .	28
2.3	Le transport quantique . . . . .	30
2.3.1	Propriétés du gaz d'électrons unidimensionnel . . . . .	31
2.3.2	Conductance d'un système unidimensionnel : approche classique . . . . .	33
2.3.3	Formule de Landauer . . . . .	34

## II Réduction du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique 41

<b>3</b>	<b>Le bruit de grenaille quantique</b>	<b>47</b>
3.1	Le bruit de grenaille classique . . . . .	47
3.2	Théorie du bruit de grenaille dans les conducteurs mésoscopiques	49
3.2.1	Approche intuitive du bruit de grenaille . . . . .	49
3.2.2	Approche par “ paquets d'ondes ” . . . . .	52
3.2.3	Perspectives . . . . .	59

<b>4</b>	<b>Mesure de la réduction du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique</b>	<b>61</b>
4.1	Échantillons . . . . .	61
4.2	Dispositif expérimental . . . . .	62
4.2.1	Principe de l'expérience . . . . .	62
4.2.2	Ordres de grandeur . . . . .	64
4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	70
4.3.1	Caractérisation du contact ponctuel quantique . . . . .	70
4.3.2	Mesure de la réduction du bruit de grenaille . . . . .	73
<b>III</b>	<b>Observation expérimentale des quasiparticules de charge fractionnaire de l'effet Hall quantique fractionnaire</b>	<b>85</b>
<b>5</b>	<b>Effet Hall classique</b>	<b>89</b>
5.1	Dynamique des électrons en champ magnétique . . . . .	89
5.2	Transport . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Effet Hall quantique entier</b>	<b>91</b>
6.1	Niveaux de Landau . . . . .	91
6.1.1	Électrons sans spin . . . . .	91
6.1.2	Prise en compte du spin . . . . .	93
6.2	Résistance Hall et effet Shubnikov-de Haas . . . . .	94
6.3	États de bord . . . . .	94
6.3.1	Potentiel extérieur . . . . .	95
6.3.2	États de bord . . . . .	96
6.3.3	Bandes compressibles et incompressibles . . . . .	97
6.4	Modèle de Büttiker . . . . .	98
6.4.1	Formule de Landauer-Büttiker . . . . .	98
6.4.2	Exemple . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Effet Hall quantique fractionnaire</b>	<b>105</b>
7.1	Introduction . . . . .	105
7.2	Propriétés de l'état fondamental . . . . .	106
7.3	Excitations élémentaires . . . . .	107
<b>8</b>	<b>Détermination de la charge des quasiparticules de Laughlin</b>	<b>111</b>
8.1	Bruit de grenaille en régime d'effet Hall quantique fractionnaire	112
8.1.1	Principe . . . . .	112
8.1.2	Approche intuitive . . . . .	112

8.1.3	Approche par “ paquets d’ondes ” . . . . .	116
<b>9</b>	<b>Observation expérimentale des quasiparticules de charge fractionnaire</b>	<b>129</b>
9.1	Dispositif expérimental . . . . .	129
9.2	Échantillon . . . . .	131
9.3	Caractérisation du contact ponctuel quantique . . . . .	132
9.4	Mesure du bruit de grenaille . . . . .	134
9.4.1	Limite forte tension . . . . .	134
9.4.2	Transition entre le bruit thermique et le bruit de grenaille	137
<b>IV</b>	<b>Bruit en charge extrinsèque d’une boîte quantique</b>	<b>155</b>
<b>10</b>	<b>Transport à travers une boîte quantique</b>	<b>159</b>
10.1	Différentes approches . . . . .	160
10.2	Énergies caractéristiques . . . . .	160
10.2.1	Largeur des niveaux d’énergie de la boîte . . . . .	160
10.2.2	Espacement des niveaux . . . . .	161
10.2.3	Énergie de charge . . . . .	161
10.3	Blocage de Coulomb et oscillations de conductance . . . . .	161
10.3.1	Principe du blocage de Coulomb . . . . .	161
10.3.2	Conductance d’une boîte quantique . . . . .	163
10.4	Mesure des oscillations de conductance . . . . .	166
<b>11</b>	<b>Mesure du bruit en charge d’une boîte quantique</b>	<b>171</b>
11.1	L’électromètre à blocage de Coulomb . . . . .	171
11.1.1	Principe . . . . .	171
11.1.2	Limitation de la résolution . . . . .	172
11.1.3	Différentes sources de bruit basse fréquence . . . . .	173
11.2	Résultats expérimentaux . . . . .	174
11.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	174
11.2.2	Mesures de bruit . . . . .	175
<b>A</b>	<b>Le bruit : définitions et exemples courants</b>	<b>195</b>
A.1	Définitions . . . . .	195
A.1.1	Densité de probabilité, valeur moyenne, variance . . . . .	195
A.1.2	Corrélation . . . . .	197
A.1.3	Analyse de Fourier, définition du bruit . . . . .	199
A.2	Différentes sources de bruit . . . . .	201

A.2.1	Bruit thermique . . . . .	202
A.2.2	Bruit basse fréquence . . . . .	204
<b>B</b>	<b>Filtrage des radio-fréquences</b>	<b>209</b>
B.1	Différentes températures . . . . .	209
B.2	Atténuation . . . . .	210
B.3	Systèmes de filtrage . . . . .	211
B.3.1	Filtres discrets . . . . .	211
B.3.2	Lignes coaxiales . . . . .	211

“ Pour bien savoir les choses, il faut en savoir le détail; et comme il est presque infini, nos connaissances sont toujours superficielles et imparfaites. ”

LA ROCHEFOUCAULD,  
in *Réflexions ou Sentences et Maximes morales*

“ Il n'existe pas de problème qu'une absence de solution ne puisse, à terme, contribuer à résoudre. ”

H. QUEUILLE

# Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Service de Physique de l'État Condensé du Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA/Saclay) entre Octobre 1994 et Septembre 1997. Que tous ceux qui m'ont aidé dans cette tâche trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

Tout d'abord J. Michel Hammann, chef en exercice de ce service, et François Gounand, chef du département<sup>1</sup>, qui ont bien voulu me donner la possibilité de travailler dans un cadre idéal pour la réalisation de mes expériences, et cependant verdoyant.

D. Christian Glattli m'a encadré durant ces trois années. Sa patience pour m'expliquer et me faire partager les richesses de l'effet Hall quantique m'a permis d'apprivoiser ce sujet qui peut parfois paraître épineux. C'est aussi à ses côtés que j'ai appris qu'"un conducteur quantique est naturellement silencieux" et mille autres choses encore.

Alain Benoit et Thierry Martin ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse; travail ardu, d'autant plus que les rigueurs du calendrier les ont obligés à faire ce dur labeur au moment même où ils s'apprêtaient à partir pour d'autres horizons. Qu'ils en soient ici remerciés.

Michel Héritier, Laurent Lévy et Bernard Etienne ont accepté de faire partie du jury. C'est un honneur auquel je suis sensible.

Une des grandes difficultés pour mener à bien le type d'expériences auquel nous nous sommes attaqués consiste à avoir des échantillons de très bonne qualité. Le savoir-faire de Bernard Etienne nous a permis de disposer d'hétérojonctions tout à fait exceptionnelles; Yong Jin, grand maître du masqueur électronique, a ensuite réalisé une lithographie parfaite.

Arvind Kumar a collaboré à la première phase de ce travail. Maintenant qu'il est reparti dans le nouveau monde, où le progrès fait rage, il est temps de le remercier pour tout ce qu'il m'a apporté durant son séjour dans notre laboratoire. Philippe Grousset a lui participé aux mesures que nous avons effectuées dans le cadre du projet européen SETTRON; je me souviens de ces moments que nous avons passés ensemble, autour du cryostat.

Patrice Jacques m'a apporté sa compétence dans deux domaines-clef de la physique, et parmi les plus épineux : l'informatique et la mécanique, qu'il maîtrise tous deux avec brio.

Raymonde Marciano est, pour les thésards qui hantent les couloirs, un soutien précieux; d'abord pour sa bonne humeur, ensuite pour son soutien moral et logistique indéfectible.

---

<sup>1</sup>Département de Recherche sur l'État Condensé, les Atomes et les Molécules.

L'ambiance du laboratoire ne serait pas ce qu'elle est sans les nombreuses âmes qu'on y croise. Wilfrid Poirier, l'histrion du rez-de-chaussée, n'a cessé de distiller sa joie et sa bonne humeur, même aux moments les plus noirs de sa rédaction. La qualité de ses " fits " restera dans ma mémoire. Dietmar Weinmann et Xavier Waintal ont subi mon voisinage immédiat avec patience, tandis que leur supérieur hiérarchique direct, Jean-Louis Pichard, m'a convaincu de l'intérêt du problème à deux, puis trois électrons<sup>2</sup>. Inès Safi m'a quant à elle patiemment expliqué les subtilités du liquide de Luttinger<sup>3</sup>. J'ai aussi une pensée émue pour le camarade Sanquer, parti pour un monde meilleur et plus montagneux. Samuel de Toro Arias et ses deux amies, Zig et Puce, ont participé à plus d'une " nocturne ". La mise en forme de ce texte doit beaucoup à Patrick Sibille, grand maître du  $\text{\LaTeX}$ , qui m'a fait rentrer dans la confrérie des gens sérieux (car les gens sérieux utilisent le  $\text{\LaTeX}$ ).

La salle-café est un haut lieu de la Science ; on y trouve la belle jeunesse de notre pays, Romain Sappey, Simon Labrunie, Yvan Dornic, Daniel Sentenac, Christine Vaast, Cécile Fradin, Xavier-François Navick, Jérôme Chavre, Maria Angeles Marcos Martin, Sabine Bottin, Annie Beya, Philippe Forget, Virginie Viallet, mais aussi d'éminents scientifiques tels Nino Boccara, Louis Laurent, Roger Bidaux, Jean-Philippe Bouchaud, Hugues Chaté, Marc Dubois, Robert Conte, Jean-Pierre Carton, Alan Braslau, Patrick Guenoun, Patrick Pari (dit PP), Dorothée Colson, Pierre Bonville, Gwenaëlle Le Bras, le camarade Ocio, Denis l'Hôte.

N'oublions pas aussi Francis Williams, Jean Daillant, Gérard Deville, Michel Devoret, Daniel Estève, Cristián Urbina, Philippe Joyez, Hugues Pothier, Vincent Bouchiat, Sophie Guéron, Patrick Warin, Roland Tourbot, Jean-François Lericque, Hans Glatthli, Claude Fermon, Maurice Chapellier.

Durant ces trois années, il m'a été donné la possibilité d'enseigner. Je tiens ici à remercier toute l'équipe qui m'a aidé dans ce travail, dont je garde le meilleur souvenir : Bernard Gatty, Brigitte Pansu, Jean-Claude Malaurent, Jean-Claude Deroche, Claudine Betrencourt, Georges Slodzian et Simone Monet.

Enfin, une pensée émue pour tous les électrons et toutes les quasiparticules qui ont bien voulu sauter...

---

<sup>2</sup>Une rumeur prétend que le nombre tend vers  $N$ .

<sup>3</sup>Rétablissons ici une vérité que les historiens apprécieront : c'est bien elle qui a généralisé l'approche de Landauer aux liquides de Luttinger.



# Introduction générale



*“ Cela me semble clair, mais cela ne résoud pas la question.*

*Évidemment, cher Monsieur, seulement, de cette façon, le problème est posé de façon correcte. ”*

IONESCO, in *Rhinocéros*, I

Grâce aux progrès des techniques de lithographie, la physique mésoscopique connaît depuis quelques années un bel essor. En effet, il est devenu possible de réaliser des structures dont la taille est inférieure à la longueur de cohérence de phase des électrons, ces derniers se comportant alors comme de véritables particules quantiques. Pourtant, les concepts de base sont très anciens : dès 1957, Rolf Landauer avait développé l’approche de “ scattering ” qui décrit la conduction dans un solide en termes de diffusion des ondes électroniques au niveau de Fermi [1]. L’idée ne trouva que fort peu d’échos, tant du côté des théoriciens que du côté des expérimentateurs [2]. Il fallut attendre 1988 pour que des expériences viennent valider définitivement l’approche de Landauer, grâce à la mise en évidence de la quantification de la conductance dans un contact ponctuel quantique [3, 4].

Quelle est la motivation fondamentale de l’étude des systèmes mésoscopiques ? Pour les industriels de la microélectronique, il s’agit de savoir jusqu’à quelles limites il est possible de réduire la taille des composants. En effet, depuis l’avènement du circuit intégré, la taille des transistors n’a cessé de diminuer, tant pour des raisons pratiques d’encombrement (la taille des ordinateurs ne cesse de décroître, ou, à taille constante, leur puissance ne cesse d’augmenter) que de rentabilité (les coûts de fabrication étant de plus en plus élevés, il faut sans cesse intégrer plus de composants dans un même circuit ou produire plus de circuits sur la même plaquette). Les transistors actuellement industrialisés ont des longueurs de grille de  $0.25\mu m$ , et des prototypes de  $40nm$  ont déjà été fabriqués. Ce “ maigrissement ” des transistors a cependant ses limites : leur fonctionnement est toujours basé sur les mêmes concepts de physique, c’est à dire une approche semi-classique du transport. Cela est tout à fait justifié tant que la taille des systèmes est beaucoup plus grande que la longueur de cohérence de phase des électrons, c’est à dire la longueur sur laquelle l’onde associée à un électron garde une phase bien définie ; on peut alors considérer les porteurs comme des particules ponctuelles classiques et en particulier négliger les effets d’interférences. Mais si le système devient plus petit que cette longueur de cohérence de phase, tous les effets liés au caractère ondulatoire des électrons redeviennent importants et il faut les inclure dans la théorie du transport : on a affaire à un conducteur quantique. Cette limite sera vite atteinte : si la taille des transistors continue à évoluer comme aujourd’hui, il faudra remettre en question tout le fonction-

nement de nos ordinateurs d'ici une décennie!!! La physique mésoscopique n'est donc pas seulement une curiosité de laboratoire.

Les physiciens fondamentalistes ont suivi un chemin quelque peu différent. Aller au-delà de la description semi-classique du transport était pour eux un but naturel. Mais comment mesurer la conductance d'une molécule ou d'un atome? L'approche expérimentale la plus simple consistait à prendre un système macroscopique suffisamment petit, et à le refroidir à suffisamment basse température pour que la longueur de cohérence de phase devienne plus grande que l'échantillon.

Il a donc fallu pour cela disposer à la fois d'une lithographie à très haute résolution et de très basses températures. Le masqueur électronique remplit la première condition, la réfrigération à dilution la seconde. La physique mésoscopique a ainsi pu prendre son essor d'un point de vue expérimental, redonnant par là un intérêt nouveau à l'approche de Landauer. Depuis, de nombreuses expériences ont été réalisées; citons, par exemple, la quantification de la conductance dans un contact ponctuel quantique [3, 4], la mesure du courant permanent dans un anneau [5, 6, 7], ou des oscillations d'Aharonov-Bohm [8].

Cependant, il faut noter que toutes ces expériences concernent l'aspect *ondulatoire* des électrons, que l'on sonde à l'aide de mesures de conductance. Or, un des aspects les plus remarquables de la mécanique quantique est la dualité onde-corpuscule. Il était donc intéressant, pour avoir une description complètement quantique du transport dans les systèmes mésoscopiques, de disposer d'une expérience mettant en évidence cette dualité onde-corpuscule. En optique, l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss mettait en évidence la nature corpusculaire des photons, et en particulier leur statistique de bosons<sup>4</sup> [9, 10, 11]. Mais une telle expérience manquait en ce qui concerne les électrons dans un solide. En 1989, Gordeï Lesovik calcula le bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique [12] et montra en particulier qu'il était réduit par le principe de Pauli. Ce calcul mettait donc explicitement en évidence la nature corpusculaire des électrons, en établissant un parallèle remarquable avec l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss [13, 14]. Ce travail révéla tout l'intérêt de considérer non seulement les valeurs moyennes des observables, comme la conductance, mais aussi les fluctuations autour de ces valeurs moyennes, comme le bruit.

Tout expérimentateur sait que mesurer du bruit n'est pas chose aisée, d'abord à cause du faible niveau du signal, mais aussi à cause de la difficulté à l'extraire des bruits parasites, d'origine expérimentale. C'est pourquoi les

---

<sup>4</sup>L'historique exact de l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss est un peu plus complexe : l'interprétation en termes de statistique de bosons est venue plus tard.

expériences réalisées jusqu'à récemment ne permettaient de vérifier que très qualitativement les prédictions théoriques. Pourtant, la quantité de travaux théoriques sur le bruit ne cessait de croître, considérant des systèmes plus complexes (systèmes diffusifs, conducteurs multi-contacts), ou de nature différente (jonctions métal normal-supraconducteur, effet Hall quantique). Le but de notre travail de thèse a donc été de mettre au point une expérience permettant de mesurer de façon quantitative et précise le bruit dans un système mésoscopique, puis de l'appliquer à différents systèmes.

Dans un premier temps, nous avons vérifié les prédictions théoriques de Lesovik sur la réduction du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique. Cette expérience était importante pour deux raisons : tout d'abord, à l'instar des premières mesures de quantification de la conductance, elle permettait de valider la théorie dans le cas d'école où il n'y a qu'un seul canal dans le conducteur. Ce pas était essentiel pour aborder des systèmes plus complexes, qui ne sont en fait que la généralisation à plusieurs canaux de ce qui se passe dans un contact ponctuel quantique. La " brique " élémentaire de toutes les théories sur le bruit dans les systèmes mésoscopiques a donc été solidement établie. Ensuite, cette expérience a prouvé la faisabilité d'une mesure précise et quantitative du bruit. Tout un champ d'expériences s'ouvrait alors, et nous avons choisi de nous intéresser au bruit en régime d'effet Hall quantique fractionnaire.

En effet, dans la limite des faibles transmissions, le bruit de grenaille permet de déterminer précisément la charge des porteurs. Or, une des prédictions les plus remarquables de la théorie de l'effet Hall quantique fractionnaire est que les excitations élémentaires sont de charge fractionnaire [15]. L'existence de ces excitations est fondamentalement liée à la nature même de l'effet Hall quantique fractionnaire, dans lequel le liquide d'électrons est incompressible. Les canaux de bord présentent aussi des propriétés remarquables : du fait de leur caractère unidimensionnel, ce sont des liquides de Luttinger et non plus des liquides de Fermi. Kane et Fisher suggérèrent que le bruit de grenaille associé au " tunneling " de quasiparticules entre deux états de bord permettrait de mesurer la charge de ces quasiparticules [16].

La deuxième expérience que nous avons faite durant cette thèse a donc consisté à mesurer le bruit de grenaille produit par le tunneling de quasiparticules entre les canaux de bords de l'effet Hall quantique. Cette expérience est la première à montrer l'existence d'excitations de charge non-entière dans un gaz d'électrons bidimensionnel en régime d'effet Hall quantique fractionnaire. Si la charge élémentaire d'une particule libre est toujours un multiple du quantum de charge  $e$ , comme l'a montré Millikan au début du siècle [17],

ceci n'est donc plus vrai pour les quasiparticules d'un système d'électrons fortement corrélés. Ce fait remarquable avait été prédit dès 1983 dans le cadre de la théorie de l'effet Hall quantique [15] et bien avant pour des systèmes unidimensionnels en interaction. Une confirmation expérimentale devenait donc primordiale...

Enfin, dans la troisième partie de notre travail, nous nous sommes intéressés aux applications des systèmes mésoscopiques, et plus précisément des boîtes quantiques. Les industriels envisagent de plus en plus d'utiliser ces systèmes comme " brique " de base pour les composants du futur, en particulier les mémoires. Dans le cadre d'un projet européen, nous avons donc cherché à caractériser des boîtes quantiques réalisées sur des hétérojonctions en termes de bruit, en particulier à basse fréquence. Il est apparu que ce bruit provenait essentiellement des défauts ou des charges résiduelles présents sur le substrat. Les boîtes quantiques étant par nature extrêmement sensibles aux charges environnantes, leur optimisation en ce qui concerne leurs caractéristiques de bruit passe avant tout par une étude des substrats.

La physique mésoscopique est un domaine en pleine évolution. Jusqu'à présent, elle s'était essentiellement intéressée aux problèmes à une particule et aux effets d'interférence, visibles dans les mesures de conductance. Cependant, ce type de sujet a déjà atteint un degré de maturité avancé. Le bruit constitue l'autre facette de la dualité onde-corpuscule, qui n'a pas été explorée jusqu'alors. Espérons que nos expériences seront suivies par beaucoup d'autres. Du point de vue théorique, les questions qui émergent sont celles qui concernent la façon d'intégrer les interactions entre particules dans la théorie du transport quantique. Cependant, dans ce domaine, les résultats sont encore prospectifs, et n'ont pas donné lieu à de réelles prédictions expérimentales.

Première partie

Généralités sur le transport  
dans les systèmes  
mésoscopiques





# Chapitre 1

## Systeme experimental

### Introduction

Le travail présenté dans cette thèse a pour but de mettre en évidence expérimentalement une prédiction récente de la Physique Mésoscopique : la réduction du bruit de grenaille. Dans ce premier chapitre, nous présenterons succinctement les principes de cette physique, qui a émergé à la fin des années cinquante, mais dont les réalisations expérimentales les plus marquantes sont beaucoup plus récentes. Différents systèmes physiques se prêtent à l'exploration du comportement quantique des électrons. Tous demandent des techniques de fabrication très sophistiquées : nous décrirons l'un d'eux, le gaz d'électrons bidimensionnel. La façon d'obtenir des hétérostructures à base de semiconducteurs de très haute mobilité (Épitaxie par Jets Moléculaires), puis de moduler la forme du gaz d'électrons (Lithographie par Faisceaux d'Électrons) sera expliquée dans ses grandes lignes.

### 1.1 L'échelle mésoscopique

Jusqu'à récemment, la physique du solide s'était concentrée essentiellement sur l'étude des systèmes macroscopiques. Ces systèmes étaient alors étudiés dans la *limite thermodynamique*, c'est à dire dans la limite où leur volume  $\Omega$  et leur nombre de particules  $N$  tendent tous deux vers l'infini, tandis que leur rapport  $N/\Omega$  reste lui fini. Mais, si on s'intéresse au transport électronique, on peut aussi définir un système macroscopique en comparant sa dimension caractéristique  $l$  à la longueur de cohérence de phase  $l_\phi$  des électrons. On dira alors que l'on est dans le domaine du macroscopique quand  $l \gg l_\phi$ . Bien sûr, en général,  $l_\phi$  est comparable aux dimensions microscopiques :  $l_\phi \sim (N/\Omega)^{-1/3}$ . Typiquement, pour un solide dans des conditions

“ standards ”,  $l_\phi$  est de l'ordre de quelques angströms.

Cependant, depuis quelques années, et grâce aux progrès réalisés dans les techniques de croissance, de lithographie et de cryogénie, on sait fabriquer et refroidir des systèmes suffisamment petits dans lesquels  $l_\phi$  peut atteindre plusieurs micromètres (c'est le cas des échantillons sur lesquels nous avons travaillé) :  $l_\phi$ , sans atteindre des tailles réellement macroscopiques, est alors beaucoup plus grand que les dimensions atomiques ou même moléculaires. C'est cette échelle de dimension, intermédiaire entre le microscopique et le macroscopique, que nous appellerons *mésoscopique*. Dans ce cas, on peut dire que  $l \sim l_\phi$ . Il faut bien réaliser que cela n'est devenu une réalité concrète que depuis quelques années : l'épitaxie par jets moléculaires, la lithographie par faisceaux d'électrons ne se sont vraiment développées (au point d'être “ utilisables ” par les physiciens) que depuis les années quatre-vingt. Depuis, la Physique Mésoscopique, dont les premiers concepts théoriques datent de la fin des années cinquante, a connu un grand engouement sur le plan expérimental.

Dans un système mésoscopique, la propagation des électrons est *cohérente*. En effet,  $l_\phi$  est la longueur sur laquelle l'onde associée aux électrons garde une phase bien définie ; elle est en général limitée par les chocs inélastiques sur les phonons (d'où l'intérêt de travailler à basse température) ou les chocs élastiques qui inversent le spin (chocs sur des impuretés magnétiques). Mais tant que l'on reste en-deça de ces deux longueurs, l'électron (expression abusive qui réfère à la quasiparticule au voisinage du niveau de Fermi) garde sa mémoire de phase. Ceci permet donc d'observer des effets d'*interférences*, tout comme en optique<sup>1</sup>. Jusqu'alors, les expériences de physique mésoscopique ont gravité autour de ces nouveaux effets quantiques d'interférences. Notons que c'est une physique à *un électron* : il s'agit toujours d'*interférences d'un électron avec lui-même*. Depuis peu l'intérêt se porte aussi sur le problème des *interactions* entre électrons, sur le plan théorique et expérimental (effet Hall quantique fractionnaire), mais dans les deux domaines les difficultés sont nombreuses.

Enfin, on peut se poser la question des applications potentielles d'une telle physique. À priori, la nécessité de travailler à basse température (typiquement quelques dizaines de  $mK$ ) ne permet pas d'envisager des applications en dehors du domaine très spécifique de la physique (électromètres à blocage de Coulomb [18], SQUID, mesure de la masse de l'anti-proton [19], mesure métrologique de la charge [20]). Cependant, la diminution constante de la taille des circuits intégrés depuis quelques années laisse penser que les

---

<sup>1</sup>Dans ce cas, la longueur de cohérence de phase dans le vide pour des photons est naturellement très grande, et les effets d'interférences sont plus faciles à observer.

concepts de la physique mésoscopique seront bientôt utiles dans l'industrie des semiconducteurs. Certes, les obstacles sont nombreux, mais certains systèmes (transistors à un électron ou SET pour Single Electron Transistor) sont déjà à l'étude dans de grands laboratoires industriels [21, 22]. En tout état de cause, ce ne sont pas les systèmes que nous étudions qui seront un jour utilisés dans l'industrie, mais plutôt les idées que nous développons qui se révéleront utiles. En effet, les lois habituelles de la physique macroscopique sont profondément modifiées : le transport est décrit en termes ondulatoires, ce qui rend inopérants des concepts aussi habituels que la loi d'Ohm. Le bruit de grenaille, qui fait l'objet de ce travail, est ici entièrement gouverné par le principe de Pauli : dans le cas d'un transport électronique complètement cohérent, il peut même être supprimé.

## 1.2 Le gaz d'électrons bidimensionnel

### 1.2.1 Différents systèmes expérimentaux

Différents systèmes expérimentaux permettent d'avoir accès aux effets mésoscopiques. Dans le cadre des mesures de transport "classique", on peut en distinguer trois, aux caractéristiques complémentaires : les structures métalliques [23], les semiconducteurs [7] et les gaz d'électrons bidimensionnels. Les métaux ont une très grande densité de porteurs, mais aussi d'impuretés : ils sont bien adaptés à l'étude du régime diffusif ; certains d'entre eux deviennent supraconducteurs à basse température, ce qui permet d'étudier les interfaces supraconducteur-métal normal. On peut aussi déposer un supraconducteur sur un semiconducteur ou sur un gaz d'électrons bidimensionnel, mais cela reste plus délicat [24, 25, 26]. Les semiconducteurs présentent l'avantage d'avoir des concentrations en porteur beaucoup plus faibles ( $10^{17}$  à  $10^{19} e/cm^3$ ) et on peut donc déposer sur leur surface des grilles qui, en déplétant les électrons, permettent de faire varier la résistance du semiconducteur<sup>2</sup>. Les gaz d'électrons bidimensionnels sont les structures dans lesquelles on arrive à obtenir les plus grandes mobilités : dans nos structures, nous avons des mobilités de  $2 \cdot 10^6 cm^2/V.s$ , à comparer avec les quelques milliers que l'on peut avoir dans le matériau massif. Le libre parcours moyen est donc très grand, ainsi que la longueur de cohérence de phase. Ils sont les candidats idéaux pour l'étude du régime *ballistique*, c'est à dire du régime de transport dans lequel les électrons traversent la structure sans subir aucun choc. Il existe différents matériaux semiconducteurs dans lesquels on peut obtenir des gaz bidimen-

---

<sup>2</sup>Dans un métal, on a des concentrations en porteur de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit  $\sim 10^{23} e/cm^3$ , ce qui rend illusoire l'utilisation de grilles.

sionnels : le plus connu est l'hétérostructure GaAs/AlGaAs. Mais on peut aussi fabriquer des hétérostructures de matériaux II-VI (CdTe/HgCdTe) ou plus récemment IV-IV (Si/Ge). Dans notre cas, nous avons utilisé des hétérojonctions GaAs/AlGaAs fabriquées au Laboratoire de Microstructures et Microélectronique (CNRS-Bagneux) par Bernard Etienne.

### 1.2.2 L'hétérojonction GaAs/AlGaAs

Dans un semiconducteur massif (ou bulk) tridimensionnel non dopé, la concentration en porteurs libres est très faible (de l'ordre de  $10^{11} e/cm^3$ ). Ce nombre d'électrons libres peut être augmenté en introduisant dans le matériau, au cours de la croissance, des dopants, c'est à dire des impuretés (par exemple le silicium dans GaAs). Ces impuretés vont s'ioniser, libérant ainsi un électron (dopage n) ou au contraire en capturant un (dopage p). Cette augmentation du nombre de porteurs libres contribue à augmenter la conductivité du matériau. Mais la mobilité à basse température est limitée par la diffusion des porteurs libres sur ces impuretés ionisées : plus il y a de dopants, plus il y a de porteurs libres, mais plus il y a de centres diffuseurs.

La solution proposée par Esaki et Tsu [27] consiste à séparer spatialement les porteurs libres des impuretés ionisées, ce qui permet d'accroître la mobilité [28, 29]. C'est le principe des hétérostructures à modulation de dopage : on fait croître successivement un matériau à grand gap dopé de type  $n$  dans notre cas et un matériau de gap plus faible non dopé ; il se crée donc à l'interface de ces deux matériaux un puits de potentiel, qui piège les électrons libérés par les dopants localisés dans le matériau de grand gap.

### Croissance des hétérostructures

Le développement et le succès des hétérostructures doit beaucoup à la technique d'Épitaxie par Jets Moléculaires (MBE pour Molecular Beam Epitaxy). En effet, il a fallu attendre que cet outil soit maîtrisé pour que l'on puisse faire croître avec un contrôle à la couche atomique près et de façon reproductible différents matériaux. Cette phase de l'élaboration des échantillons a été réalisée au Laboratoire de Microstructures et Microélectronique (CNRS-Bagneux) par Bernard Etienne. L'idée consiste à envoyer des atomes et des molécules sur un substrat monocristallin chauffé à une température appropriée ( $600^\circ C$  typiquement pour GaAs, mais cette température fait partie des multiples paramètres délicats à optimiser). Les flux d'atomes et de molécules sont obtenus à partir de cellules d'évaporation contenant les matériaux-sources très purs.

La possibilité de réaliser de “ bonnes ” hétérostructures repose sur la faible différence de paramètre de maille entre les matériaux, ce qui est le cas pour GaAs et AlGaAs. On fait donc croître une couche d'arséniure de gallium (matériau à petit gap) sur un substrat de même nature, suivie d'une couche d'alliage AlGaAs où 33% du gallium est remplacé par de l'aluminium. C'est dans cet alliage (matériau à grand gap) que l'on inclut un plan d'atomes de silicium qui, en s'ionisant, va générer le gaz d'électrons bidimensionnel de l'hétérojonction. Enfin, on recouvre l'ensemble avec une couche d'Arséniure de gallium pour éviter l'oxydation de l'alliage AlGaAs.

### Formation du gaz d'électrons bidimensionnel

La largeur de la bande interdite de l'alliage  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  varie presque linéairement avec la concentration  $x$  en aluminium (pour  $x$  petit). GaAs aura donc une largeur de bande interdite plus faible que celle de l'alliage AlGaAs. Lorsque les deux matériaux sont mis en contact, il y a une discontinuité et l'ajustement du niveau de Fermi à l'interface produit une courbure de bande : il se forme un puits de potentiel (figure 1.1). La profondeur du puits est donnée par la différence entre les gaps des deux matériaux, qui dépend de la concentration  $x$  d'aluminium dans l'alliage *via* la formule :

$$E_g [\text{eV}] = 1.519 + 1.42x \text{ pour } x \leq 0.44 \text{ à } \theta = 2K$$

Si  $x > 0.40$  le gap devient indirect. Dans nos structures,  $x$  vaut 33%. Les électrons libérés par les atomes de silicium vont être majoritairement transférés et piégés vers les états de surface. Cependant, une faible partie va aller dans le puits de potentiel, pour former le gaz d'électrons bidimensionnel à l'interface  $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ . Dans nos échantillons, on obtient à 4K une densité  $n_s = 10^{11} \text{e}/\text{cm}^2$  et une mobilité  $\mu = 2 \cdot 10^6 \text{cm}^2/\text{Vs}$ .

En conclusion, on peut dire que le principal intérêt de ces structures est de séparer le gaz d'électrons des impuretés ionisées, ce qui permet d'atteindre de très grandes mobilités, nécessaires à l'étude du transport balistique. De plus, on obtient un gaz d'électrons à deux dimensions et de basse densité, ce qui permet l'utilisation de grilles déposées à la surface pour dépléter les porteurs et passer à un système quasi-unidimensionnel.

### Propriétés élémentaires du gaz d'électrons dans nos structures

Dans un gaz d'électrons bidimensionnel, l'énergie selon une des directions de l'espace réciproque (en général on choisit par convention  $z$ ) est quantifiée.

Dans les deux autres directions, on a l'énergie cinétique d'une particule libre.

$$E_n \left( \vec{k}_x, \vec{k}_y \right) = E_n + \frac{\hbar^2 \left( \vec{k}_x^2 + \vec{k}_y^2 \right)}{2m^*}$$

où  $n$  indexe la sous-bande bidimensionnelle considérée, et  $m^*$  représente la masse effective de l'électron (dans GaAs,  $m^* = 0.067m_0$ ). La densité d'états dans une sous-bande est constante et vaut :

$$g_{2D}^n = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}$$

Dans les cas que nous étudierons ici, on peut toujours considérer que seule la première sous-bande est occupée. En notant  $n_s$  la densité surfacique d'électrons, on peut déterminer le niveau de Fermi grâce à la relation :

$$n_s = \int_0^{E_F} f(E) g_{2D}(E) dE$$

où  $f(E)$  est la fonction de Fermi-Dirac :

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{k_B\theta}\right) + 1}$$

Après intégration, on obtient :

$$n_s = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} k_B \theta \ln \left[ 1 + \exp\left(\frac{E_F}{k_B \theta}\right) \right]$$

On trouve  $E_F = 3.55 meV$  pour  $n_s = 10^{11} e/cm^2$ . Le vecteur d'onde de Fermi est donné par  $|\vec{k}_F| = \sqrt{2\pi n_s} = 7.92 \cdot 10^7 m^{-1}$  et la longueur d'onde de Fermi vaut  $\lambda_F = 2\pi/k_F = 80 nm$ . En comparaison, à  $50 mK$ , l'énergie thermique vaut  $E_{th} = k_B \theta = 4.3 \mu eV$ .

### 1.3 La lithographie

À partir de ces hétérostructures d'arséniure de gallium, on réalise les dispositifs expérimentaux que nous avons utilisés. Il s'agit de " moduler " la forme du gaz d'électrons, pour former des systèmes quasi unidimensionnels (contact ponctuel quantique-QPC) ou zéro-dimensionnels (boîtes quantiques). Mais on peut aussi faire des structures plus complexes : boîtes à plusieurs contacts [30], boîtes couplées, etc. L'étape de lithographie est

réalisée par Yong Jin, du Laboratoire de Microstructures et Microélectronique (CNRS-Bagneux), en utilisant la technique de lithographie électronique. C'est avec cette technique que l'on obtient les meilleurs résultats à l'heure actuelle en terme de résolution (d'autres problèmes limitent l'usage industriel de cette technique).

Le principe de la lithographie est de réaliser un masque à la surface de la couche à l'aide d'une résine que l'on insole (par des électrons, des rayons X ou des UV) puis que l'on développe. On peut ensuite, à travers ce masque, soit réaliser une attaque chimique (pour le mésa), soit évaporer des métaux. La résine qui reste (et qui forme le masque) sera finalement dissoute dans un solvant organique.

La réalisation de nos échantillons par lithographie se décompose en trois étapes principales (les structures " fines " (pointes des QPC) nécessitant elle-même plusieurs " sous-étapes " ) : gravure du mésa, dépôt des contacts ohmiques, évaporation des grilles.

### 1.3.1 La gravure du mésa

C'est la première étape de lithographie. Elle consiste à définir la forme du gaz bi-dimensionnel sur lequel on va travailler et réaliser les structures fines (1D ou 0D). Pour nos échantillons, nous avons utilisé une barre Hall (figure 1.2). Le mésa est réalisé par gravure " humide " : on attaque chimiquement la surface du GaAs sur une très faible épaisseur ; en effet, lorsque les atomes de silicium s'ionisent, la plupart des électrons vont se piéger sur les états de surface et seule une petite partie va former le gaz d'électrons bidimensionnel. Cette gravure, même peu profonde, favorise la migration des électrons vers la surface, suffisamment pour qu'il n'y en ait plus dans le puits en-dessous des parties gravées. Nous avons utilisé des mésas de différentes largeurs (pour des raisons historiques et techniques) :  $6\mu m$  pour les expériences que nous avons faites en champ nul, plusieurs dizaines de  $\mu m$  pour les expériences en régime d'effet Hall quantique : en effet, un mésa trop étroit favorise la rétrodiffusion non contrôlée dans le mésa et celui-ci devient alors plus résistif (cf. partie III).

### 1.3.2 Les contacts ohmiques

La difficulté réside ici dans la nécessité d'avoir les contacts les moins résistifs possibles [31]. En particulier, il faut éviter de former une barrière Schottky. La taille des contacts est choisie de telle sorte que la soudure de fils d'or ou d'aluminium soit aisée : typiquement, les plots de contact font une centaine de microns de largeur. Ils sont obtenus par dépôts successifs

de nickel, d'or et de germanium. En chauffant rapidement (environ  $1mn$ ) la surface de l'échantillon à  $450^{\circ}C$ , il se forme un alliage  $NiAuGe$ , qui va diffuser et contacter le gaz d'électrons (celui-ci se trouve à  $100nm$  de la surface). La résistance de ces contacts est de l'ordre du  $k\Omega$ , cependant, il est parfois arrivé qu'elle se mette à diverger en champ magnétique intense, ce qui rend l'échantillon difficilement utilisable !

### 1.3.3 La technique de la “ grille fendue ”

C'est la technique la plus courante pour réaliser le confinement des électrons. C'est cette étape qui nécessite la précision sub-micronique de la lithographie électronique : l'espacement des grilles formant le contact ponctuel quantique est de quelques milliers d'angströms et il est impossible d'avoir une telle précision avec de la lithographie optique (figure 1.2).

La technique de la “ grille fendue ” consiste à évaporer à la surface de l'échantillon une grille en or (avec une couche d'accrochage en titane) qui forme une barrière Schottky. Lorsqu'aucune tension n'est appliquée sur ces grilles (elles sont alors au même potentiel que le gaz d'électrons), elles n'ont aucun effet : la forme du gaz  $2D$  est celle du méso. Par contre, si on les polarise négativement, elles vont dépléter le gaz d'électrons en-dessous ; avec une tension suffisante, on forme un canal unidimensionnel entre les deux pointes (le caractère unidimensionnel est défini par rapport à la longueur d'onde de Fermi). Enfin, lorsqu'on les polarise encore plus, on peut arriver à dépléter complètement les électrons : on a alors une barrière-tunnel. La tension à laquelle ceci se produit est appelée tension de *pincement total*.

## Conclusion

Dans cette partie d'introduction, nous avons présenté très succinctement le cadre de la Physique Mésoscopique. Puis nous avons décrit le système expérimental qui nous permet le plus facilement d'avoir accès à un des aspects de cette physique, le transport balistique : il s'agit d'hétérostructures d'arséniure de gallium à modulation de dopage, dans lesquelles la mobilité électronique est suffisamment grande pour avoir des longueurs de cohérence de phase de plusieurs micromètres. Enfin, la technique de lithographie électronique, la plus utilisée à ce jour lorsque l'on a besoin d'une précision sub-micronique, est exposée dans ses grandes lignes : c'est elle qui sert à définir les parties “ fines ” de la structure, contacts ponctuels quantiques ou boîtes quantiques.



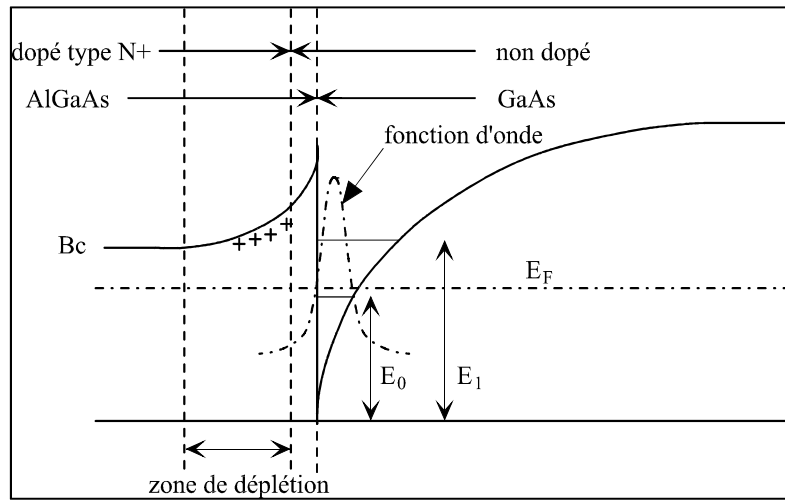


FIG. 1.1 – Structure de bande d’une hétérojonction. La fonction d’onde est localisée dans le puits, tandis que les impuretés ionisées sont dans la couche isolante (*AlGaAs*). Les électrons sont donc confinés dans un plan à l’interface des deux matériaux. Sur ce dessin, les échelles ne sont pas respectées : en réalité, on a  $E_C - E_V \gg E_0$ .

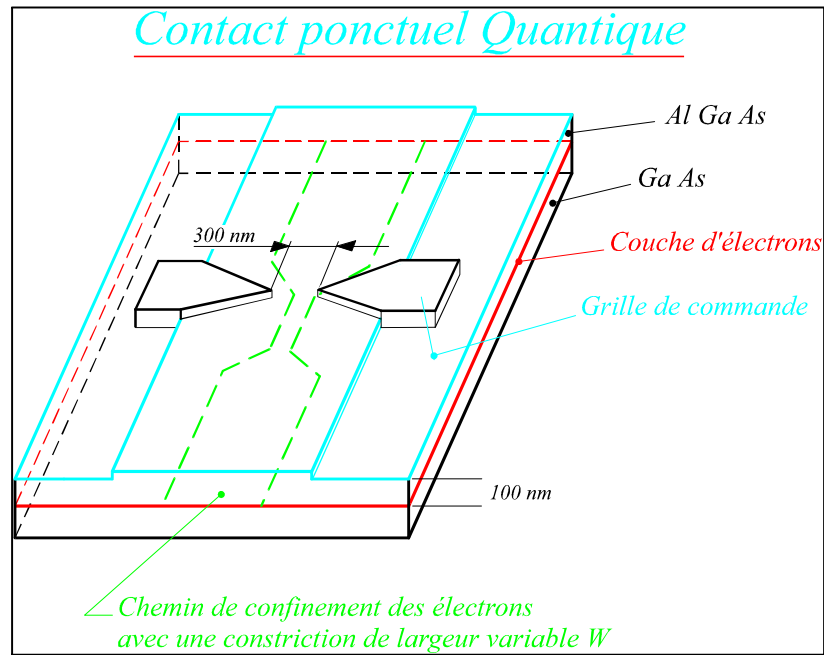


FIG. 1.2 – Réalisation de l'échantillon : on commence par graver le méso pour définir la forme du gaz d'électrons bidimensionnel. La largeur du méso est de quelques micromètres. Des grilles sont ensuite évaporées à la surface pour obtenir les parties fines (points-contact), dont l'espacement est d'environ 100 nm.

# Chapitre 2

## Transport quantique : le cas du régime balistique

### Introduction

Le travail présenté ici concerne le bruit de grenaille dans des systèmes mésoscopiques : il s'agit du bruit *hors-équilibre* associé au passage du courant. Autrement dit, on cherche à détecter les fluctuations temporelles du courant autour de sa valeur moyenne. Cependant, dans un premier temps, il est nécessaire d'introduire certains concepts fondamentaux de transport quantique, puis de les illustrer par le calcul de la conductance d'un système mésoscopique. Le terme *illustrer* indique bien qu'il s'agit d'exemples simples, connus depuis longtemps tant sur le plan théorique qu'expérimental ; les mesures de bruit qui viendront ensuite sont une autre conséquence de cette approche de transport quantique, mais elles ne sont en aucun cas complémentaires des mesures de conductance. Il s'agit plutôt de deux aspects d'un même problème, qu'il faut considérer sur un même niveau.

Après avoir rappelé brièvement les différents mécanismes de diffusion des électrons dans un solide, et les différentes longueurs caractéristiques qui y sont associées, nous décrirons le régime de transport classique (formule de Drude), puis quantique (formule de Landauer).

### 2.1 Mécanismes de diffusion des électrons dans un solide

Dans un solide cristallin, la conductivité est essentiellement limitée par les chocs des porteurs libres (électrons ou trous) sur les centres diffuseurs. On

peut classer les centres diffuseurs en trois grandes catégories, et associer à chacune d'elle une longueur de collision caractéristique. Ce sont ces longueurs caractéristiques, et leur évolution avec la température, qui conditionnent la transition du régime de transport classique vers celui du transport quantique.

À température finie, les atomes d'un cristal vibrent autour de leur position d'équilibre : ces modes vibratoires sont quantifiés en phonons, caractérisés par leur pulsation  $\omega$  [32, 33]. Dans un choc électron-phonon, l'énergie de l'électron n'est pas conservée ; ce sont donc des chocs inélastiques. On peut définir un temps caractéristique,  $\tau_{e-ph}$ , qui est le temps séparant deux collisions électron-phonon, et une longueur caractéristique,  $l_{e-ph} = v_F \tau_{e-ph}$ , où  $v_F$  est la vitesse de Fermi.

Les électrons ont aussi des chocs avec d'autres électrons ou avec des trous. Ce processus est très important, puisqu'il est responsable de la *thermalisation* des électrons [34], comme nous le verrons plus loin. Ces collisions sont inélastiques (d'où le processus de thermalisation) et on leur associe le temps  $\tau_{e-e}$  et la longueur  $l_{e-e} = v_F \tau_{e-e}$ . En régime balistique, le temps de collision électron-électron peut être bien approximé par la formule [35] :

$$\frac{1}{\tau_{e-e}} = \frac{E_F}{2h} \left( \frac{k_B \theta}{E_F} \right)^2 \ln \left( \frac{E_F}{k_B \theta} \right)$$

où  $E_F$  est l'énergie de Fermi. Dans une hétérostructure d'Arséniure de gallium, on trouve un  $\tau_{e-e}$  de l'ordre de 100ps.

Enfin, on peut envisager des collisions sur les impuretés : par ce terme générique, on désigne tous les défauts du réseau qui modifient le potentiel vu par les électrons ; ce sont par exemple des atomes en substitution, en position interstitielle, ou des dislocations du réseau. La rugosité d'interface provoque elle aussi des chocs, ainsi que le potentiel aléatoire créé par l'ionisation des dopants (donneurs silicium dans notre cas). Ce sont des chocs élastiques, qui jouent un rôle important dans le régime diffusif. On désigne par  $l_{e-imp.} = v_F \tau_{e-imp.}$  la longueur parcourue par un électron entre deux chocs sur des impuretés.

Il existe aussi des collisions qui, tout en étant élastiques, brisent la cohérence de phase. Ce sont par exemple celles qui renversent le spin de l'électron. Elles peuvent se produire en présence d'impuretés magnétiques. Comme ce n'est pas le cas dans nos échantillons, nous n'en parlerons pas.

Tous ces types de collisions peuvent se diviser en deux catégories : les chocs élastiques et les chocs inélastiques. Les chocs inélastiques brisent nécessairement la cohérence de phase : l'électron change d'énergie propre et donc d'état propre. On désigne par  $l_e = v_F \tau_e$  et  $l_{in} = v_F \tau_{in}$  les distances moyennes parcourues par un électron entre deux chocs élastiques et inélastiques.

## 2.1. MÉCANISMES DE DIFFUSION DES ÉLECTRONS DANS UN SOLIDE 27

La Physique Mésoscopique s'intéresse au transport d'électrons cohérents, c'est à dire sur des distances  $l \lesssim l_\phi = l_{in}$ . À température ambiante, ce sont les processus électron-phonon qui dominent, c'est à dire des processus qui brisent la cohérence de phase. On est alors dans un régime de transport classique, avec une mobilité principalement limitée par  $\tau_{e-ph}$ . Cependant, le couplage électron-phonon diminue très vite avec la température [32, 33]. Ainsi, en refroidissant, on atteint un régime où  $l_e \ll l_{in}$  [36]. On peut alors à nouveau définir trois régimes différents (figure 2.1) :

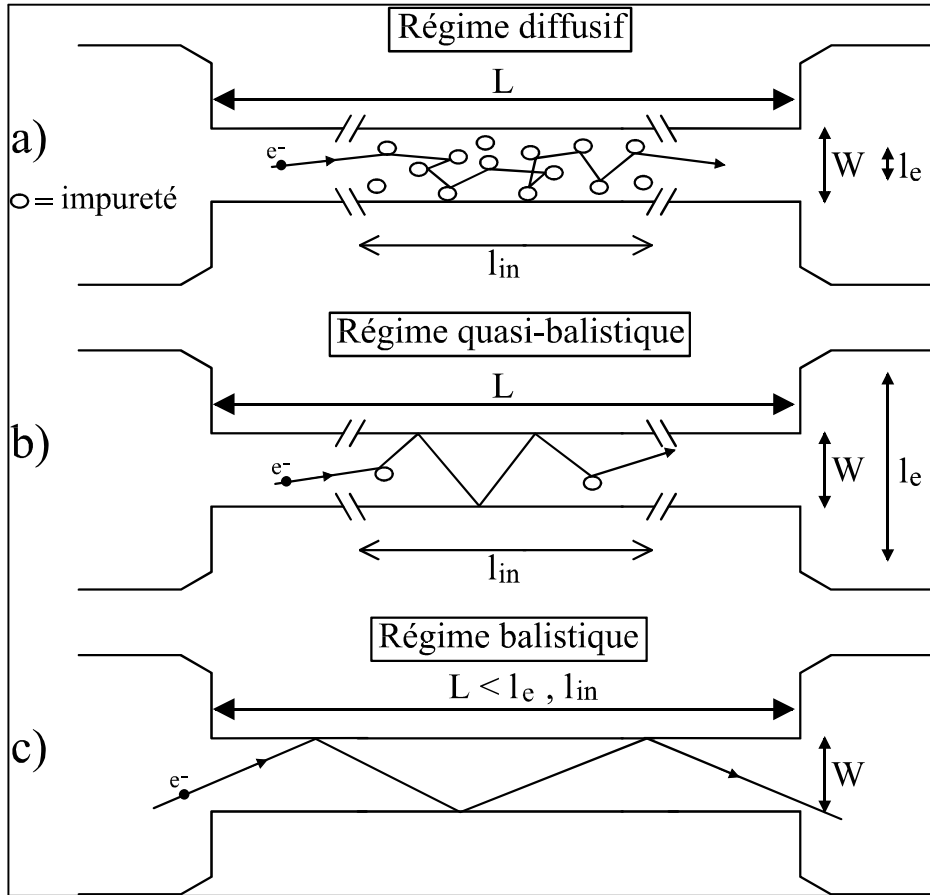


FIG. 2.1 – Différents régimes de transport mésoscopiques : en haut, le régime diffusif, propre aux métaux ou aux semiconducteurs. Au milieu, un régime intermédiaire, dit quasi-balistique. Enfin, en bas, le régime balistique, auquel nous nous intéresserons. Dans ce cas, l'électron traverse la structure sans être diffusé par des impuretés.

- Le régime *diffusif* : dans ce cas, si on appelle  $L$  la longueur du système, on a  $L \ll l_\phi$ . Les électrons subissent plusieurs chocs élastiques sur

des impuretés avant de perdre leur cohérence de phase. Ce régime est typiquement celui des systèmes métalliques. Il donne lieu à des effets d'interférences quantiques extensivement étudiés sur le plan théorique et expérimental [37].

- Un régime intermédiaire, dit *quasi-balistique* : si  $W$  est la largeur de l'échantillon, les différentes longueurs s'ordonnent selon la hiérarchie  $W \ll l_e \ll L$ .
- Le régime *balistique*, auquel nous nous intéresserons tout au long de ce travail de thèse. Dans ce cas, toutes les dimensions de l'échantillon sont inférieures au libre parcours moyen élastique :  $L, W \preceq l_e$ . Il est à noter, car ceci aura de l'importance dans la suite, que dans ce type d'échantillon,  $l_\phi \sim l_{in}$ . Lorsque l'électron arrive dans le réservoir, il subit tout de suite un choc inélastique : ainsi, on évite les processus de rétro-diffusion cohérente vers le conducteur quantique.

Voici un tableau comparatif des ordres de grandeur des différentes longueurs caractéristiques que l'on trouve dans les systèmes expérimentaux décrits au paragraphe 1.2.1 :

	$\lambda_F$	$l_e$	$l_\phi(300K)$	$l_\phi(1K)$
Métaux usuels	$\sim 4$	$\sim 100 - 300$	$\sim 300$	$\sim 1\mu m$
Semiconducteurs dopés	$\sim 200$	$\sim 100 - 300$	$\sim 500$	$\sim 1\mu m$
Hétérostructures GaAs/AlGaAs	$\sim 400 - 700$	$\sim 2 - 10\mu m$	$\sim 300$	$\gtrsim 10\mu m$

Pour des structures telles que celles sur lesquelles nous avons travaillé, ( $n_s = 10^{11}e/cm^2$ ,  $\mu = 2 \cdot 10^6 cm^2/Vs$ ), le libre parcours moyen élastique peut atteindre  $10\mu m$  à basse température. Nous serons donc toujours dans le cas du transport balistique et il faut appliquer la théorie du transport balistique : nous détaillerons celle-ci plus loin, après quelques brefs rappels sur le transport classique.

## 2.2 Le transport classique

Nous allons décrire ici le modèle de Drude, qui concerne des systèmes pour lesquels  $L, W \gg L_{in}$ . Ce modèle s'applique par exemple aux échantillons macroscopiques. Deux hypothèses principales sont à la base de cette théorie : tout d'abord, entre deux collisions, les électrons se déplacent sans aucune interaction, ni entre eux ni avec le réseau. En particulier, en l'absence de perturbation extérieure, leur mouvement est rectiligne et uniforme. Ensuite, les collisions sont instantanées et redistribuent de façon aléatoire la vitesse des électrons. Il s'agit donc d'un modèle classique de particules ponctuelles,

indéformables, soumises à une force extérieure. Il faut remarquer que l'on ne tient pas compte des effets d'interférences.

Considérons un gaz d'électrons bidimensionnel, soumis à un champ électrique  $\vec{E}$  dans le plan des électrons. Ceux-ci acquièrent une vitesse de dérive ("drift velocity")  $\vec{v} = -e \vec{E} \Delta t / m$  dans l'intervalle de temps  $\Delta t$  qui le sépare de sa dernière collision (rappelons que  $\vec{v} = \vec{0}$  par hypothèse après une collision). La valeur moyenne de  $\Delta t$  est appelée le *temps de collision*  $\tau$ . La valeur moyenne de la vitesse de dérive vaut donc :

$$\vec{v}_{drift} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E} = \mu_e \vec{E}$$

où  $\mu_e$  est appelée la mobilité électronique. Si on multiplie la dernière égalité par la densité surfacique  $n_s$ , on obtient la densité de courant de dérive  $\vec{j}_{drift}$  et la conductivité  $\sigma$  par la relation  $\vec{j}_{drift} = -en_s \vec{v}_{drift} = \sigma \vec{E}$ . Cette conductivité, appelée *conductivité de Drude*, vaut donc :

$$\sigma = en_s \mu_e = \frac{n_s e^2 \tau}{m}$$

Ce courant de dérive est accompagné d'un courant de diffusion, qui correspond à la réponse du gaz d'électrons à la présence d'un gradient de concentration  $\vec{\nabla} n_s$ . Ce courant vaut :

$$\vec{j}_{diff} = eD \vec{\nabla} n_s$$

Le courant total est la somme de ces deux courants :

$$\vec{j} = \vec{j}_{drift} + \vec{j}_{diff} = en_s \mu_e \vec{E} + eD \vec{\nabla} n_s$$

À l'équilibre thermodynamique, c'est à dire lorsque le potentiel électrochimique (défini par  $\mu = eV + E_F$ ) est uniforme, le courant total doit s'annuler. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \mu &= e \vec{\nabla} V + \vec{\nabla} E_F = e \vec{E} + \frac{\partial E_F}{\partial n_s} \vec{\nabla} n_s = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{E} &= -\frac{1}{e} \frac{1}{\frac{\partial n_s}{\partial E_F}} \vec{\nabla} n_s = -\frac{1}{e} \frac{1}{g(E_F)} \vec{\nabla} n_s \end{aligned}$$

où  $g(E_F)$  est la densité d'états au niveau de Fermi. En reportant ce résultat dans la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{0} = \sigma \vec{E} + eD \vec{\nabla} n_s = -\sigma \frac{1}{e} \frac{1}{g(E_F)} \vec{\nabla} n_s + eD \vec{\nabla} n_s \\ \Rightarrow \sigma &= e^2 g(E_F) D \end{aligned}$$

Cette dernière relation relie  $\sigma$  à des paramètres mesurés au niveau de Fermi, la densité d'états et la constante de diffusion. Ceci est dû au fait que, dans une distribution de Fermi-Dirac  $f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B\theta}} + 1}$ , seuls les électrons au niveau de Fermi (ou, à température finie, dans un intervalle  $\pm k_B\theta$  autour du niveau de Fermi) ont la possibilité de modifier leur occupation. La conductivité électrique à température non nulle s'obtient par une simple généralisation des relations précédentes [36] :

$$\sigma(E_F, \theta) = \int_0^{+\infty} \sigma(E, 0) \frac{df}{dE_F} dE$$

À deux dimensions, on obtient la conductance simplement en multipliant la conductivité par le rapport d'aspect  $W/L$ , où  $W$  est la largeur de l'échantillon, et  $L$  sa longueur. C'est elle que l'on mesure expérimentalement, en faisant passer un courant entre deux réservoirs et en mesurant la différence de potentiel qui en résulte.

Il faut remarquer que cette théorie du transport classique est basée sur le fait que l'on peut définir des *grandeurs locales* : conductivité, mobilité, et un temps caractéristique au bout duquel l'électron perd sa mémoire de phase. Autrement dit, on peut couper le système en morceaux, chacun étant régi par les lois du transport classique. Il y a cependant une limite fondamentale à ce raisonnement : si on essaye d'atteindre des dimensions plus petites que le libre parcours moyen, cette description n'a plus de sens.

Dans un métal à température ambiante, par exemple, cette dimension est de l'ordre de grandeur des distances inter-atomiques : dans le cadre de la physique du solide, l'approche classique est donc tout à fait justifiée. Mais dans les systèmes que nous étudions, ce libre parcours moyen peut atteindre la dizaine de micromètres : la limite fondamentale en-dessous de laquelle la description classique cesse d'être pertinente est donc beaucoup plus grande que la distance entre atomes. Si on se place en-dessous de cette limite, mais bien au-delà de la distance inter-atomique, c'est à dire si on regarde un système *mésoscopique*, il devient impossible de définir des grandeurs locales : couper un système quantiquement cohérent n'a pas de sens ! Il faut donc utiliser une approche purement quantique, et définir des grandeurs globales : conductance, résistance... C'est cette approche que nous allons décrire dans le paragraphe suivant.

## 2.3 Le transport quantique

Nous allons nous intéresser ici à des systèmes dans lesquels toutes les dimensions caractéristiques sont inférieures au libre parcours moyen élastique



des électrons. Il s'agit donc de systèmes *quantiques* et on ne peut les considérer que globalement : le but d'une théorie quantique du transport est de calculer des conductances ou des résistances, et non des conductivités. C'est ce qui a motivé l'approche dite de *scattering*, développée par Landauer à la fin des années 50 [1, 38]. Bien que cette théorie puisse s'appliquer à n'importe quelle dimension, nous étudierons surtout dans cette thèse des systèmes quasi-unidimensionnels (Contacts Ponctuels Quantiques). Nous commencerons donc par donner quelques notions sur les gaz d'électron à une dimension, puis leur propriétés de transport classique, qui donne une idée assez intuitive de l'approche de Landauer. Enfin, nous détaillerons un peu plus la façon dont on obtient la formule de Landauer.

### 2.3.1 Propriétés du gaz d'électrons unidimensionnel

À partir du gaz d'électrons bidimensionnel formé à l'interface de l'hétérojonction GaAs/AlGaAs, on réalise des structures unidimensionnelles<sup>1</sup> en déposant à la surface de l'échantillon des grilles qui, une fois polarisées, confinent les électrons. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le confinement des électrons dans une des directions de l'espace conduit à la quantification de leur énergie dans cette direction. De même, un confinement selon une deuxième direction (choisie comme  $y$  de façon arbitraire) conduit à la quantification de l'énergie selon cette direction. La relation de dispersion selon la troisième direction reste celle d'une particule libre :

$$E_{n,m}(\vec{k}_x) = E_n + E_m + \frac{\hbar^2 \vec{k}_x^2}{2m^*}$$

$E_n$  et  $E_m$  représentent l'énergie quantifiée selon les directions  $y$  et  $z$ , correspondant aux valeurs discrètes de  $|\vec{k}_y|$  et  $|\vec{k}_z|$ , le mouvement dans la direction  $x$  restant libre. Chaque sous-bande  $2D$  s'est donc divisée en une série de sous-bandes  $1D$  séparées par des énergies  $\Delta E_m$  bien inférieures aux énergies séparant les sous-bandes  $2D$  ( $\Delta E_m \ll \Delta E_n$ ). Les faibles densités électroniques utilisées dans nos structures permettent de considérer qu'une seule sous-bande  $2D$  est occupée ; dans la suite, on prendra donc le bas de la première bande de conduction  $2D$  comme référence des énergies, ce qui permet d'éliminer le terme  $E_n$  dans l'expression de l'énergie totale. L'ordre de grandeur du terme  $\Delta E_m$  est du  $meV$ .

La densité d'états est un paramètre important du système et dépend fortement de la dimensionalité. À deux dimensions, nous avons vu que celle-ci

---

<sup>1</sup>Par unidimensionnels, nous entendons des systèmes dans lesquels deux des dimensions sont comparables à la longueur d'onde de Fermi  $\lambda_F$ .

était indépendante de l'énergie dans une sous-bande donnée :  $g_{2D}^n = \frac{m^*}{\pi\hbar^2}$ , où  $n$  est l'indice de la sous-bande. On peut montrer facilement qu'à une dimension, la densité d'états devient [32, 33] :

$$g_{1D}^m = \frac{1}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m^*}{E - E_m}} \theta(E - E_m)$$

où  $E_m$  est l'énergie du bas de la  $m$ -ième sous-bande de conduction unidimensionnelle, et  $\theta$  la fonction d'Heaviside. La densité d'états totale vaut donc :

$$g_{1D}(E) = \sum_{m=0}^M g_{1D}^m(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{m=0}^M \sqrt{\frac{2m^*}{E - E_m}} \theta(E - E_m)$$

avec  $M$  le nombre de sous-bandes occupées. La figure 2.2 représente la densité d'états à une dimension.

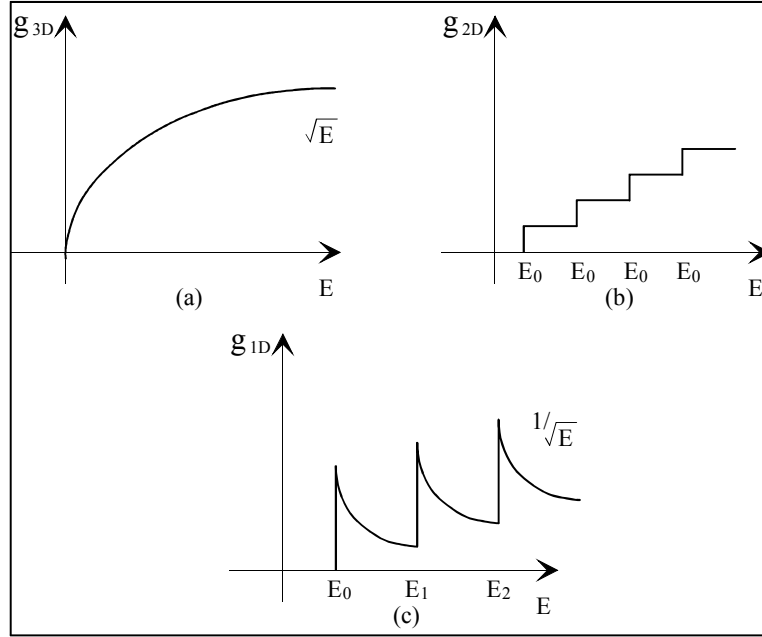


FIG. 2.2 – Densité d'états pour un gaz d'électrons tridimensionnel (a), bi-dimensionnel (b) et unidimensionnel (c) en fonction de l'énergie. À deux dimensions, la densité d'états dans une sous-bande donnée est constante. À une dimension, on a une singularité chaque fois que l'on croise l'énergie d'une sous-bande.

La densité électronique se calcule alors par :

$$n_{1D} = \int_0^{+\infty} f(E) g_{1D}(E) dE$$

$f(E)$  étant la distribution de Fermi-Dirac. À température nulle, on obtient simplement le résultat suivant :

$$n_{1D} = \frac{2}{\pi\hbar} \sum_{m=0}^M \sqrt{2m^* (E_F - E_m)} \theta(E_F - E_m)$$

La forme exacte de  $E_m$  dépend beaucoup de la forme du potentiel de confinement. Pour un puits abrupt infini,  $E_m$  varie comme  $m^2$ ; si on considère un potentiel parabolique, plus réaliste dans le cas d'une déplétion électrostatique,  $E_m$  est proportionnel à  $m$  [39].

### 2.3.2 Conductance d'un système unidimensionnel : approche classique

On s'intéresse à un conducteur unidimensionnel compris entre deux réservoirs de charges, en équilibre aux potentiels  $E_F$  et  $E_F + \delta\mu$  (avec  $\delta\mu = eV$ ). La largeur de ce conducteur est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer qu'une seule sous-bande 1D est occupée (à température nulle). Supposons de plus que ce conducteur soit parfait, en ce sens qu'un électron émis par un réservoir atteint de façon certaine l'autre réservoir (il ne peut pas être rétro-diffusé).

Le courant de dérive est la différence entre le courant qui va du réservoir de gauche vers le réservoir de droite et celui qui va dans l'autre sens : ces deux courants se compensent exactement jusqu'au niveau de Fermi. Les seuls électrons à prendre en compte sont donc ceux dont l'énergie est comprise entre  $E_F$  et  $E_F + \delta\mu$ . On note  $v(E)$  la vitesse des électrons,  $g_{1D}(E)$  leur densité d'états :  $v(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}$  et  $g_{1D}(E) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_{E_F}^{E_F + \delta\mu} e g_{1D}(E) v(E) dE \\ &= \frac{e}{\pi\hbar} \delta\mu = \frac{e^2}{\pi\hbar} V = \sigma V \end{aligned}$$

avec :

$$\sigma = 2 \frac{e^2}{h}$$

Cette grandeur, qui ne dépend que des constantes fondamentales de la physique, est appelée *quantum de conductance* et vaut :

$$\sigma_Q = 77.48 \mu S = \frac{1}{12.91 \cdot 10^3} \Omega^{-1}$$

Ce résultat est indépendant de la sous-bande unidimensionnelle considérée ; si plusieurs niveaux 1D sont accessibles, le courant total est donc la somme des courants dus à chaque sous-bande :

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m=0}^M I^m = \sum_{m=0}^M \frac{e}{\pi \hbar} \delta \mu \\ \Rightarrow \sigma &= M \cdot 2 \frac{e^2}{h} \end{aligned}$$

Il faut bien remarquer que ce résultat est spécifique au fait que l'on soit à une dimension : en effet, ce n'est que dans ce cas que le produit  $g_{1D}(E) v(E)$  est constant. De plus, ce calcul simplifié montre que *la conductance d'un système idéal n'est pas infinie*. L'approche de Landauer permet de mieux comprendre ce résultat.

### 2.3.3 Formule de Landauer

#### Formule à un canal : quantification de la conductance

La formule de Landauer [1] est une sorte de relation d'Einstein : elle relie la conductance à *la probabilité de transmission* des électrons au niveau de Fermi (la relation d'Einstein la reliait au coefficient de diffusion au niveau de Fermi). Bien qu'elle puisse se généraliser à des systèmes à deux ou trois dimensions, nous allons l'établir ici dans le cas unidimensionnel.

Landauer considère un système unidimensionnel relié à des réservoirs. Le rôle de ces réservoirs est d'injecter des électrons dans un état défini par leur potentiel chimique, et d'absorber les électrons qu'ils reçoivent. C'est dans ces réservoirs qu'ont lieu tous les phénomènes dissipatifs ; en particulier, un électron qui pénètre dans un réservoir perd toute cohérence de phase. De plus, les électrons émis par différents réservoirs n'ont aucune cohérence de phase entre eux. En ce sens, les réservoirs sont des *corps noirs* ; nous verrons plus loin qu'ils jouent un rôle important et que ce sont eux en particulier qui rendent la conductance de ce système parfait finie.

Landauer modélise l'échantillon par une barrière de transmission  $T$  et de réflexion  $R = (1 - T)$ . De façon à imposer le passage du courant dans une direction donnée, on applique une petite différence de potentiel  $eV = (\mu_1 - \mu_2)$  aux réservoirs ; on la suppose suffisamment faible pour que ni la densité d'états ni la transmission ne varient dans la gamme d'énergie  $eV$ .

Dans un premier temps, supposons qu'il n'y a qu'un seul canal ; par canal, il faut comprendre un mode de propagation caractérisé par la quantification du vecteur d'onde transverse. Ceci revient donc à dire qu'il n'y a qu'une

seule sous-bande unidimensionnelle occupée. Comme précédemment, on ne s'intéresse qu'aux états compris entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , car, à température nulle, les courants en-dessous de  $\mu_2$  se compensent exactement. La bande d'énergie  $eV$  contient  $eV \cdot g_{1D}(E_F)$  états disponibles, qui se déplacent avec une vitesse  $v(E_F)$ . Comme chaque état a la même probabilité  $T$  d'être transmis, on en déduit :

$$\begin{aligned} I &= (\mu_1 - \mu_2) g_{1D}(E_F) e v(E_F) T \\ &= e^2 V \frac{1}{\pi \hbar} T = G V \end{aligned} \quad (2.1)$$

On en déduit immédiatement la *formule de Landauer* [1, 38] pour un canal :

$$G = 2 \frac{e^2}{h} T$$

où  $G$  est la *conductance* du système. Dans le cas où plusieurs sous-bandes  $1D$  sont occupées, les conductances de chaque sous-bande s'ajoutent :

$$G = 2 \frac{e^2}{h} \sum_{n=0}^N T_n$$

où  $N$  est le nombre totale de sous-bandes  $1D$  (éventuellement,  $T$  vaut 0 pour certains canaux). Cette conductance n'est pas infinie, bien que le conducteur soit idéal dans le sens où il ne diffuse pas les électrons. Ce résultat, qui peut paraître paradoxal, provient du fait que l'on a calculé ici une conductance “ deux points ” : on a divisé le courant par la différence de potentiel *entre les réservoirs* ; ceci revient donc à calculer la conductance du système [conducteur quantique + réservoirs] et il n'est pas étonnant que celle-ci soit finie (les réservoirs sont le siège de tous les processus inélastiques).

On peut cependant retrouver la conductance du système quantique seul, c'est à dire la conductance d'une simple barrière de transmission  $T$ . Pour cela, il faut faire une mesure “ quatre fils ” (au sens théorique du terme) [1, 36, 37, 38, 40, 41] : supposons que le conducteur quantique soit relié aux réservoirs *via* des fils parfaits (il n'y a pas de processus inélastiques dans ces fils). La chute de tension sera mesurée dans ces fils (cf. figure 2.3). Appelons  $\mu_1$  et  $\mu_A$  les potentiels chimiques dans le réservoir et le fil de gauche,  $\mu_2$  et  $\mu_B$  les potentiels chimiques dans ceux de droite. Il faut alors calculer  $\mu_A$  et  $\mu_B$  ; il suffit pour cela d'un simple comptage des états occupés et vides dans les deux fils de part et d'autre de l'échantillon. Le potentiel chimique est déterminé par la condition que le nombre d'états vides au-dessous de ce potentiel chimique est égal au nombre d'états occupés au-dessus. La densité d'états dans ces fils vaut  $2 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}}$ .

---

<sup>2</sup>Le facteur 2 vient du fait qu'il faut tenir compte des deux directions de propagation

- Dans le fil de droite, le nombre d'états occupés au-dessus de  $\mu_B$  vaut :

$$T(\mu_1 - \mu_B) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}}$$

Le nombre d'états vides au-dessous de  $\mu_B$  est égal au nombre d'états disponibles moins le nombre d'états occupés :

$$(\mu_B - \mu_2) 2 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}} - T(\mu_B - \mu_2) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}} = (2 - T)(\mu_B - \mu_2) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}}$$

On en déduit :

$$2\mu_B = T\mu_1 + (2 - T)\mu_2 \quad (2.2)$$

- Dans le fil de gauche, le nombre d'états occupés au-dessus de  $\mu_A$  est égal au nombre d'états disponibles moins le nombre d'états transmis :

$$(\mu_1 - \mu_A) 2 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}} - T(\mu_1 - \mu_A) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}} = (2 - T)(\mu_1 - \mu_A) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}}$$

Le nombre d'états vides au-dessous de  $\mu_B$  vaut le nombre d'états disponibles moins le nombre d'états occupés :

$$(\mu_A - \mu_2) 2 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}} - (2 - T)(\mu_A - \mu_2) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}} = T(\mu_A - \mu_2) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{dE}{dk}}$$

Finalement :

$$2\mu_A = (2 - T)\mu_1 + T\mu_2 \quad (2.3)$$

La différence 2.3–2.2 donne immédiatement :

$$(\mu_A - \mu_B) = R(\mu_1 - \mu_2)$$

En reportant ce résultat dans 2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= e^2 V \frac{1}{\pi \hbar} \frac{T}{R} = GV \\ \Rightarrow G &= 2 \frac{e^2}{h} \frac{T}{R} \end{aligned}$$

On voit donc que dans ce cas, on trouve bien une conductance infinie. La résistance finie trouvée en 2.1 est en fait une *résistance de contact* !

Il a souvent été développée une analogie entre l'optique et la physique mésoscopique ; nous la reprendrons plus tard en l'appliquant aux problèmes

de bruit (cf. § 3.2.2). Ici, on peut comparer le contact ponctuel quantique à un *guide d'ondes*, pour l'onde associée aux électrons.

Pour cela, considérons une onde de longueur d'onde  $\lambda_F$  arrivant sur un guide d'ondes de largeur  $W$  (cf. figure 2.4). Tant que  $\lambda_F/2 \prec W$ , l'onde ne peut être transmise que sous forme évanescente, avec une intensité à la sortie qui dépend de la longueur du guide, et qui correspond à la grandeur  $T_1$  définie précédemment :  $T_1$  est donc en fait un coefficient de transmission pour l'onde électronique. Quand la condition  $\frac{W}{\frac{\lambda_F}{2}}$  entier est réalisée, un mode peut se propager dans le guide d'onde : il est parfaitement transmis. Ainsi, lorsque  $\frac{W}{\frac{\lambda_F}{2}} = 1$ ,  $T_1 = 1$  ; de même, on a  $\text{Int} \left[ \frac{W}{\frac{\lambda_F}{2}} \right]$  modes parfaitement transmis. La conductance du contact ponctuel quantique peut donc s'écrire :

$$\sigma = 2 \frac{e^2}{h} \text{Int} \left[ \frac{W}{\frac{\lambda_F}{2}} \right]$$

où  $2e^2/h$  est la contribution d'un mode électronique à la conduction (en tenant compte de la dégénérescence de spin). Bien sûr, la forme exacte de la constriction réalisée sur le gaz bidimensionnel est difficile à estimer [3, 4] ; mais cette analogie permet de comprendre intuitivement ce qui se passe dans un conducteur quantique.

### Réalisation expérimentale

La première réalisation expérimentale qui mit en évidence la quantification de la conductance en multiples de  $2e^2/h$  dans les systèmes quasi-unidimensionnels date de 1988 [3, 4]. Elle utilise une géométrie de grilles très semblable à celle que nous avons utilisée (cf. figure 4.2) : deux pointes métalliques confinent les électrons situés  $100nm$  en-dessous de la surface. La séparation entre les pointes est de  $300nm$ . Lorsque l'on polarise négativement la grille, on forme un canal unidimensionnel, puis une barrière-tunnel quand on atteint la tension de pincement total. Parmi les électrons incidents sur la constriction, seuls sont transmis ceux dont la composante du vecteur d'onde transverse vérifie  $k_y = n\pi/W$  avec  $n$  entier. Lorsque l'on trace la conductance en fonction de la tension de grille, on observe donc des plateaux à des valeurs quantifiées : ceux-ci sont très visibles sur les échantillons que nous avons utilisés (cf. figure 2.5).

Cependant, dans notre cas, les plateaux ne sont pas parfaitement plats. Ceci peut être interprété comme étant dû à la présence d'une impureté à

---

(vers la droite et vers la gauche). Dans le calcul du courant, ce facteur n'intervenait pas car on ne considérait que les électrons qui allait de la gauche vers la droite.

proximité du point-contact : un tel phénomène se produit souvent dans ces hétérostructures, à cause du potentiel aléatoire des impuretés ionisées. L'onde est alors réfléchie vers le point-contact, et les effets d'interférences donnent les oscillations observées. Dans nos expériences sur le bruit, nous avons surtout observé en détails le régime tunnel, qui correspond aux conductances entre 0 et 1 en unités de  $2e^2/h$ .

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons abordé le problème du transport quantique. Après avoir défini le régime de transport concerné, en fonction des différentes longueurs caractéristiques, nous avons regardé plus en détails le cas quasi-unidimensionnel, d'abord classiquement, puis quantiquement. Ceci conduit naturellement à la formule de Landauer, et à la quantification de la conductance. Cette formule montre en particulier que la conductance d'un système " idéal ", mesurée en deux points, n'est pas infinie, mais qu'elle le devient si on fait la mesure en quatre points. Enfin, nous avons présenté des mesures faites sur nos échantillons : des résonances altèrent la quantification des plateaux de conductance, à cause de la présence probable d'une impureté à proximité du point-contact.

La partie suivante sera consacrée aux mesures de bruit dans ce système. En particulier, on verra que le bruit de grenaille, et sa réduction, sont une autre façon de valider l'approche de Landauer. Celui-ci ne fait plus intervenir la transmission  $T$ , mais le produit  $T(1 - T)$  ; en jouant uniquement sur la tension de grille, on peut passer continuellement du régime de bruit de grenaille classique à celui quantique de suppression totale du bruit.



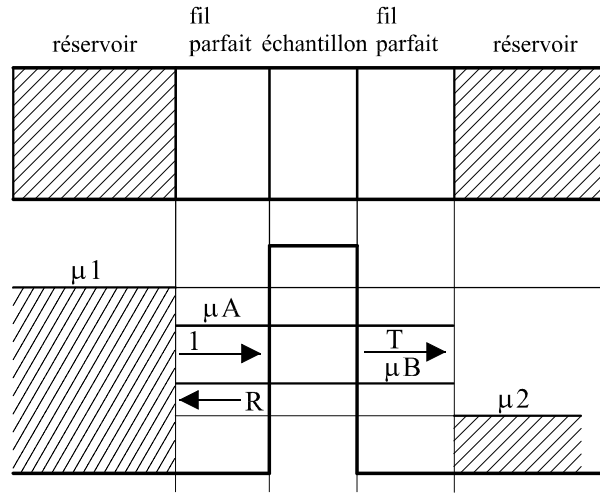


FIG. 2.3 – Schéma du système considéré par Landauer : l'échantillon est connecté aux réservoirs *via* des fils unidimensionnels parfaits. La chute de potentiel est mesurée dans ces fils parfaits (mesure "quatre fils"). Dans ce cas, on retrouve bien une conductance divergente quand la transmission de la barrière vaut 1.

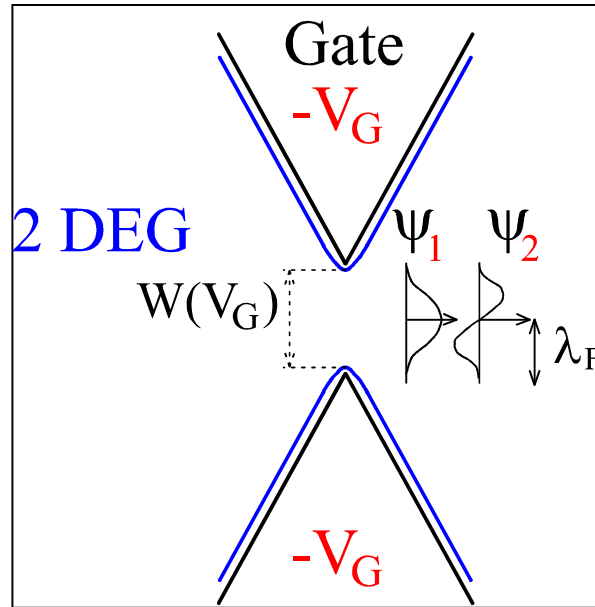


FIG. 2.4 – Le contact ponctuel quantique comme guide d'ondes : le premier mode est transmis quand la largeur du canal vaut  $\lambda_F/2$ , le deuxième quand la largeur du canal vaut  $\lambda_F$ , etc..

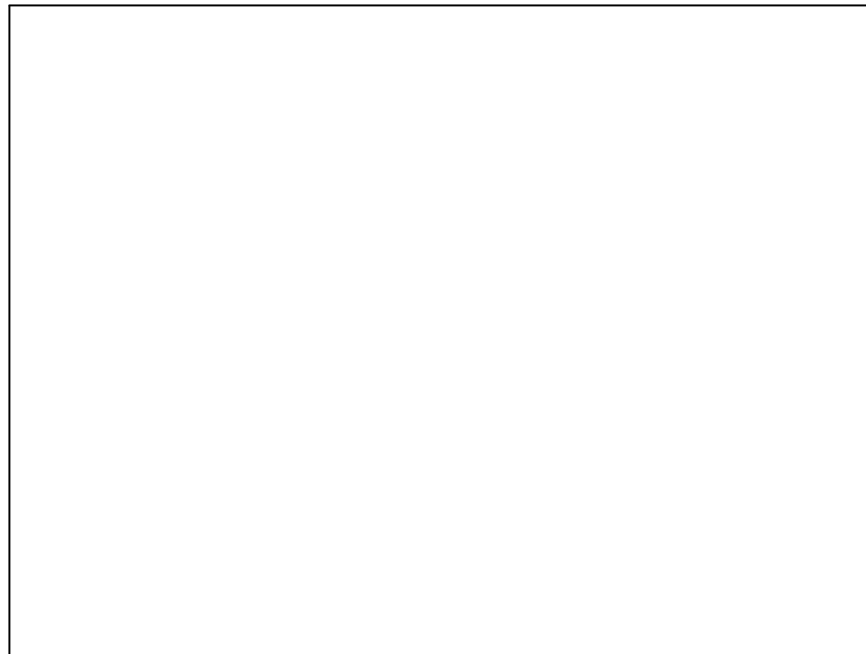


FIG. 2.5 – Conductance du contact ponctuel quantique en fonction de la tension de grille, à  $38mK$ . Les oscillations sur les plateaux révèlent la présence d’une impureté à proximité du point-contact, qui rétrodiffuse les électrons.

## Deuxième partie

# Réduction du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique



# Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons vu les propriétés de transport d'un conducteur mésoscopique balistique, et plus particulièrement d'un contact ponctuel quantique. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au bruit de grenaille, dans de tels systèmes.

Il est important de noter que ces deux types de mesures apportent des informations fondamentalement différentes sur la physique [48] ; en effet, les mesures de transport concernent les valeurs moyennes des observables, courant ou tension :

$$G = \frac{\langle I \rangle}{\langle V \rangle}$$

De même,  $\langle I \rangle \propto \bar{n}$ , avec  $\bar{n}$  le nombre moyen de porteurs qui traversent une section du conducteur par unité de temps.

Par contre, les mesures de bruit concernent les *fluctuations* autour de ces valeurs moyennes :

$$S_i \propto \overline{(n - \bar{n})^2} \quad (2.4)$$

où  $n$  est le nombre de porteurs qui traverse une section du conducteur par unité de temps. Les mesures de conductances ou de résistances ne donnent donc pas accès à l'aspect corpusculaire des électrons : par exemple, dans un conducteur classique, la charge est totalement délocalisée (les électrons sont décrits par des ondes planes), et on peut définir des grandeurs physiques comme la conductance : la notion de quanta de charge n'intervient pas. Par contre, pour pouvoir parler de bruit, il faut que le nombre  $n$  d'électrons de la relation 2.4 soit bien défini : cela est impossible dans le cas d'un fluide continu.

Un autre aspect important du transport tel que nous l'avons décrit dans le chapitre 2 est qu'il concerne l'aspect ondulatoire des électrons. En effet, l'approche de scattering décrit la conduction en termes de *transmission d'une onde électronique* au niveau de Fermi. Ceci est radicalement différent de la description que l'on adopte dans un conducteur classique, où le transport est décrit par la théorie de la réponse linéaire. Cependant, ceci n'est pas encore une description complètement quantique du transport, dans la mesure

justement où elle ne concerne *que* l'aspect ondulatoire. En particulier, la distinction bosons/fermions n'intervient pas explicitement. On trouverait les mêmes relations pour la conductance si on parlait, par exemple, de photons ; d'ailleurs, nous avons vu au paragraphe 2.3.3 qu'un contact ponctuel quantique pouvait être considéré comme un guide d'onde.

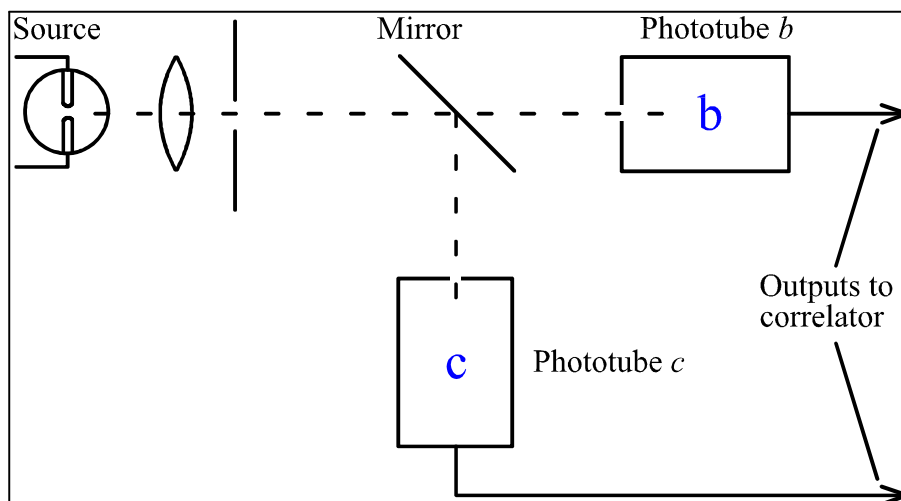


FIG. 2.6 – Expérience de Hanbury-Brown et Twiss : un faisceau de lumière est scindé en deux, et on mesure la corrélation des bruits à la sortie des photomultiplicateurs. L'intensité dans chaque faisceau est liée à la nature ondulatoire des photons ; par contre, la corrélation des bruits traduit le fait qu'un photon ne peut pas être dans les deux faisceaux à la fois.

Cependant, l'aspect corpusculaire est aussi présent dans la mécanique quantique, notamment dans le bruit :

- L'approche probabiliste entraîne un bruit quantique : la présence, ou l'absence, d'un quantum d'excitation (ou corpuscule) est statistique
- Ces quanta d'excitation subissent une interaction statistique, qui modifie le bruit quantique à  $N$  particules

La question qui se pose est donc : est-il possible d'imaginer une expérience qui nous permettrait de mettre en évidence le caractère *fermionique* des électrons, et ce dans le cadre d'un conducteur quantique ? Cette question a déjà été abordée il y a longtemps dans le cadre de l'optique [49] : il s'agissait alors de regarder les effets de statistique sur le bruit des photons [9, 10, 11].

Considérons l'expérience schématisée sur la figure 2.6 : un faisceau de lumière, émanant d'une même source<sup>3</sup>, est scindé en deux faisceaux à l'aide

<sup>3</sup>Dans le cas de l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss [9, 10, 11], il s'agissait d'une étoile.

d'un miroir semi-réfléchissant ; on a ainsi un faisceau réfléchi et un faisceau transmis. À l'aide de deux photodétecteurs, on mesure ensuite le bruit dans les deux faisceaux, et on corréle les deux mesures.

L'intensité que l'on mesure dans chaque détecteur est liée au regroupement (bunching) des photons : ils ont tendance à passer “ en groupe ” dans le même faisceau.

La corrélation des bruits mesurés dans les deux photodétecteurs est reliée à leur aspect corpusculaire : un même photon se retrouve *soit* dans le faisceau transmis, *soit* dans le faisceau réfléchi.

Il s'agit donc là d'une expérience qui met en évidence la dualité onde-corpuscule des photons. Le problème que nous nous posons est donc formellement le même : si la conductance d'un contact ponctuel quantique ne donne accès qu'à la transmission des ondes électroniques, et donc à l'aspect ondulatoire des électrons, il faut inventer une autre expérience qui soit sensible à leur nature corpusculaire, et donc à leur statistique. C'est ce que nous nous proposons de faire à l'aide de notre expérience sur le bruit de grenaille.

Dans ce chapitre, nous commencerons par faire un bref rappel sur le bruit de grenaille “ classique ”, tel qu'on le trouve dans des systèmes comme la diode à vide ou la jonction-tunnel. Ensuite, nous aborderons le problème du bruit dans les conducteurs quantiques ; en particulier, nous montrerons que l'on peut retrouver en passant à la limite le bruit de grenaille classique et le bruit thermique. Puis nous détaillerons notre système expérimental, avant de présenter les résultats expérimentaux proprement dits. Nous verrons que ceux-ci confirment quantitativement d'une façon très précise les prédictions théoriques.





# Chapitre 3

## Le bruit de grenaille quantique

### 3.1 Le bruit de grenaille classique

Nous exposerons dans l'annexe A.1.3 une dérivation du bruit de grenaille par le théorème de Carson. Ici, nous nous intéresserons aux hypothèses qui sous-tendent ce calcul, et en donnerons une dérivation plus “ physique ”. Dans un premier temps, considérons le dispositif étudié par Schottky [42] et schématisé sur la figure 3.1 : il s'agit d'une diode à vide, dans laquelle des électrons sont émis thermiquement de l'anode vers la cathode. On se place à basse fréquence, de telle façon qu'il n'y ait pas d'effets de charge d'espace, c'est à dire qu'un électron n'atteigne pas la cathode avant qu'un autre ne soit émis<sup>1</sup>. L'émission d'un électron par l'anode est considérée dans ce modèle comme un événement rare et aléatoire ; en particulier, il n'y a aucune corrélation entre l'émission d'un électron à un instant  $t$  et l'émission d'un autre électron à l'instant  $t'$ . Il s'agit donc de calculer le bruit lié à un processus poissonien. Ce problème est analogue à celui de la pluie tombant sur un toit : l'arrivée successive des gouttes est absolument non corrélée, et le bruit est celui d'un processus poissonien. Nous traiterons ce problème dans l'annexe A.1.3 à l'aide du théorème de Carson ; une autre façon plus simple de l'aborder est d'utiliser les propriétés élémentaires des distributions poissoniennes. Le courant est relié au nombre moyen  $\bar{n}$  d'électrons qui traversent la diode par unité de temps :  $I = q\bar{n}$ ,  $q$  étant la charge des porteurs. Les fluctuations autour de ce nombre moyen sont données par :  $\overline{\Delta I^2} = q^2 \overline{\Delta n^2}$ . Comme on a affaire à un processus poissonien, on sait que la variance est proportionnelle à la valeur moyenne (cf. § A.1.1) :  $\overline{\Delta n^2} \propto \bar{n}$ . Finalement,

---

<sup>1</sup>Dans le cas contraire, on pourrait induire une corrélation dans le passage des électrons : à cause de la répulsion coulombienne, un autre électron ne pourrait être émis tant que le premier n'a pas atteint la cathode.

on obtient que  $\overline{\Delta I^2} \propto \bar{n}$ . Le calcul présenté dans le paragraphe A.1.3 de l'annexe A donne<sup>2</sup> :

$$S_I = 2e\bar{I} \quad (3.1)$$

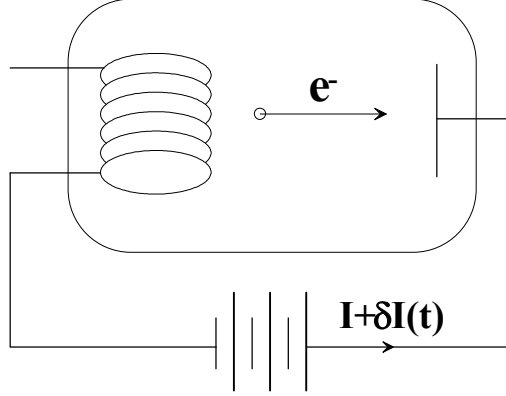


FIG. 3.1 – Schéma de principe d'une diode à vide. Les électrons sont émis thermiquement par l'anode, de façon rare et aléatoire. Le bruit en courant est alors poissonien.

Ce résultat, établi par Schottky [42] est valable, par exemple, dans les diodes à vide. Cependant, au-delà de ce simple cas d'école, on trouve du bruit de grenaille dans de nombreux composants [43] : jonction  $p-n$ , diode-tunnel, transistor bipolaire, etc. Dans ces systèmes, le bruit de grenaille est souvent une limitation fondamentale aux performances, en particulier aux fréquences élevées, c'est à dire au-delà des fréquences caractéristiques du bruit en  $1/f$ .

Prenons l'exemple de la jonction  $p-n$  : la caractéristique courant-tension est donnée par :

$$I = I_0(V) \left[ e^{\frac{eV}{2k_B\theta}} - 1 \right]$$

$V$  étant la différence de potentiel appliquée à la jonction. Le courant est fait de porteurs qui traversent la barrière individuellement à des instants aléatoires ; le bruit de grenaille est donc donné par<sup>3</sup> :

$$S_I = 2eI_0(V) e^{\frac{eV}{k_B\theta}} + 2eI_0(V)$$

<sup>2</sup>Le facteur 2 vient de la transformée de Fourier.

<sup>3</sup>Dans une jonction  $p-n$ , il y a deux types de porteurs qui circulent dans des directions opposées : on trouve donc un signe  $-$  dans l'expression du courant. Par contre, les bruits générés par ces deux porteurs s'ajoutent : c'est pourquoi on trouve un signe  $+$  dans l'expression du bruit de grenaille.

### 3.2. THÉORIE DU BRUIT DE GRENAILLE DANS LES CONDUCTEURS MÉSCOPICIQUES

ou, de façon équivalente par :

$$S_I = 2eI \coth \left( \frac{eV}{2k_B\theta} \right)$$

ce qui est équivalent à la formule 3.1 en tenant compte de la dépendance de  $I_0$  en fonction de  $V$ .

Lorsque l'on atteint des fréquences encore plus élevées, de l'ordre du temps de transit des électrons dans la structure, d'autres processus réduisent le bruit : des charges d'espace se forment, c'est à dire qu'un électron est encore présent dans la structure lorsque le suivant est émis. Il en résulte une corrélation dans l'émission des porteurs, qui réduit le bruit en-dessous de la valeur attendue pour un processus purement poissonien. Notons qu'il ne s'agit pas là d'un effet quantique, mais d'une simple conséquence de la répulsion coulombienne. Nous verrons dans les paragraphes suivants que dans un système mésoscopique, et donc quantiquement cohérent, on trouve une réduction du bruit de grenaille due, cette fois, à des effets purement quantiques liés au principe d'exclusion de Pauli (interaction statistique).

## 3.2 Théorie du bruit de grenaille dans les conducteurs mésoscopiques

### 3.2.1 Approche intuitive du bruit de grenaille

Dans un premier temps, nous allons donner une approche intuitive du bruit de grenaille [37], qui utilise la notion de réservoir introduite au paragraphe 2.3.3. Considérons le système décrit par la figure 3.2 : un réservoir de particules à l'équilibre (potentiel chimique  $\mu$ , température  $\theta$ ) émet des particules dans le vide *via* un guide d'ondes. Ce guide d'ondes a un coefficient de transmission  $T$  (on peut par exemple considérer que des obstacles réfléchissent certaines particules). On suppose de plus que l'ouverture est très petite, et donc que seul un nombre négligeable de particules s'échappe, de telle sorte que l'équilibre du réservoir ne soit pas perturbé par la fuite. On appelle  $n(\varepsilon)$  la densité d'états par unité de longueur et par unité d'énergie dans la guide d'ondes.

Comme le réservoir est à l'équilibre, tous les états qui sortent par le tuyau sont occupés avec une probabilité  $f(\varepsilon)$  ( $f$  peut-être soit une distribution de Fermi-Dirac, soit une distribution de Bose-Einstein). Pour un intervalle d'énergie  $\Delta\varepsilon$ , on s'intéresse au courant de particules qui sort du réservoir en direction du tuyau :

$$\overline{I_0} = \nu \overline{f}$$

$$\nu = \nu n(\varepsilon) \Delta\varepsilon$$

$v$  étant la vitesse dans la direction du tuyau. Sur ces  $I_0$  particules émises du réservoir vers le tuyau, la probabilité d'en avoir  $I$  qui sortent est donnée par la probabilité d'avoir  $I$  événements réussis parmi  $I_0$  essais indépendants, chacun ayant une probabilité  $T$  de réussir ; cette probabilité est :

$$P_{I_0}(I) = C_{I_0}^{I_0} T^I (1-T)^{I_0-I}$$

Le courant moyen s'obtient par la relation<sup>4</sup> :

$$\bar{I} = \sum_{I_0} P(I_0) \underbrace{\sum_I P_{I_0}(I)}_{T I_0} = \sum_{I_0} P(I_0) T I_0 = T \bar{I}_0 = \nu \bar{f} T$$

On peut maintenant calculer le bruit, c'est à dire la quantité  $\overline{\Delta I^2} = \overline{I^2} - \bar{I}^2$  :

$$\begin{aligned} \overline{I^2} &= \sum_{I_0} P(I_0) \sum_I I^2 P_{I_0}(I) = \sum_{I_0} P(I_0) [(T I_0)^2 + I_0 T (1-T)] \\ \Rightarrow \overline{\Delta I^2} &= T^2 \underbrace{\sum_{I_0} P(I_0) I_0^2}_{\bar{I}_0^2} + T(1-T) \sum_{I_0} P(I_0) I_0 - T^2 \bar{I}_0^2 \end{aligned}$$

On utilise ensuite la relation  $\overline{I_0^2} = \bar{I}_0^2 + \overline{\Delta I_0^2}$  :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta I^2} &= T^2 (\bar{I}_0^2 + \overline{\Delta I_0^2}) + T(1-T) \bar{I}_0 - T^2 \bar{I}_0^2 \\ &= T^2 \overline{\Delta I_0^2} + T(1-T) \bar{I}_0 \end{aligned}$$

Dans cette relation, on peut distinguer différentes sources de bruit : le premier terme est un bruit dû aux fluctuations dans la population des états émis par le réservoir, et le second terme est dû au partitionnement de ces états entre états transmis et états réfléchis<sup>5</sup>. Si le faisceau incident est parfaitement non-bruyant, il ne reste donc que le terme de partition.

Le premier terme, lui, contient l'aspect quantique du problème, dans le terme  $\overline{\Delta I_0^2}$ . En effet, celui-ci vaut :

$$\overline{\Delta I_0^2} = \nu^2 \overline{\Delta f^2} = \nu^2 (\overline{f^2} - \bar{f}^2)$$

---

<sup>4</sup>On calcule ces expressions en utilisant la relation  $(a+b)^n = \sum_p C_p^n a^p b^{n-p}$  puis en la dérivant par rapport à  $a$  :  $\frac{d}{da} (a+b)^n = \sum_p p C_p^n a^{p-1} b^{n-p} \Rightarrow a \frac{d}{da} (a+b)^n = \sum_p p C_p^n a^p b^{n-p}$ , etc.

<sup>5</sup>C'est pourquoi le Shot-Noise est souvent appelé "bruit de *partition*".

### 3.2. THÉORIE DU BRUIT DE GRENAILLE DANS LES CONDUCTEURS MÉSCOPHIQUES 51

Il dépend donc de la *statistique* des particules, selon que  $f$  est la fonction de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein. Pour des fermions, le calcul est immédiat, en utilisant le fait que  $f = f^2 \Rightarrow \bar{f} = \bar{f}^2$  (pour des fermions, il ne peut y avoir que 0 ou 1 particule par état quantique). On a alors :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta I_0^2} &= \nu^2 (\bar{f}^2 - \bar{f}^2) = \nu^2 (\bar{f} - \bar{f}^2) \\ &= \nu^2 \bar{f} (1 - \bar{f})\end{aligned}$$

c'est à dire que les fluctuations de courant valent :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta I^2} &= \nu T^2 \bar{f} (1 - \bar{f}) + \nu \bar{f} T (1 - T) \\ &= \nu \bar{f} T (1 - \bar{f} T)\end{aligned}$$

Le résultat serait complètement différent s'il s'agissait de bosons, par exemple des photons. En effet, on aurait alors<sup>6</sup>  $(\bar{f}^2 - \bar{f}^2) = f(1 + f)$ , et le bruit vaudrait :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta I^2} &= \nu T^2 \bar{f} (1 + \bar{f}) + \nu \bar{f} T (1 - T) \\ &= \nu \bar{f} T (1 + \bar{f} T)\end{aligned}$$

Ce résultat est à rapprocher de l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss [9, 10, 11]. Ces auteurs ont mesuré les fluctuations d'intensité dans un faisceau de photons émis par un corps noir ; ils observent alors un bruit donné par la relation précédente, et donc *supérieur* au bruit  $\nu \bar{f}$  attendu pour des particules classiques dans le cas d'une transmission unité. On voit que ce résultat est fondamentalement lié à la statistique des particules :  $\overline{\Delta I^2} = \nu \bar{f} T (1 \pm \bar{f} T)$  selon que l'on a des bosons ou des fermions. En particulier, pour une transmission unité, on trouve un bruit double pour des photons, alors qu'il s'annule pour des fermions : les fermions sont obligés de passer " un par un ", alors que les photons ont tendance à passer " en groupes ".

Cette présentation a l'avantage de montrer clairement où intervient la statistique des particules. On peut généraliser cette approche au cas où les particules ne sont pas émises dans le vide, mais vers un autre réservoir. Deux effets sont alors à prendre en compte : d'abord, les fluctuations vont dépendre aussi des états disponibles dans le second réservoir ; ensuite, il faut prendre en compte le bruit généré par l'émission de particules du second réservoir vers

---

<sup>6</sup>Pour obtenir ce résultat, il suffit d'appliquer la relation  $\overline{f(\varepsilon_i)} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} Z$  et  $\overline{f^2(\varepsilon_i)} = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i^2} Z$ ,  $Z$  étant la fonction de partition.

le premier. Nous ne détaillerons pas ce calcul ici, mais il est détaillé dans la référence [37] à laquelle nous renvoyons le lecteur.

La technique que nous venons de décrire peut s'appliquer de façon presque similaire au cas d'un conducteur mésoscopique. C'est l'objet du paragraphe suivant, qui reprend l'approche dite “ de paquets d'ondes ”, développée par Martin et Landauer [52, 14].

### 3.2.2 Approche par “ paquets d'ondes ”

L'approche par “ paquets d'ondes ” proposée par Landauer [52], puis développée par Martin et Landauer [14, 53], est globalement similaire à l'approche utilisant la seconde quantification introduite par Büttiker [13, 54, 55], bien qu'elle n'utilise pas ce formalisme. Elle permet de retrouver d'une façon plus “ physique ” les principaux résultats [56] ; par contre, certains aspects qui font intervenir des termes d'échanges [13] ne peuvent être obtenus. Cependant, comme nous n'en parlerons pas dans ce travail, nous nous limiterons à l'approche par paquets d'ondes.

#### Hypothèses du modèle

L'idée fondamentale de cette approche est d'étendre la théorie de scattering aux problèmes de bruit. Un électron est émis par un réservoir ; l'onde associée est transmise avec une amplitude  $T$  et réfléchi avec une amplitude  $R = 1 - T$ . Par contre, l'électron est *soit* transmis, avec une probabilité  $T$ , *soit* réfléchi, avec une probabilité  $R$ . Calculer le bruit revient donc à calculer les fluctuations autour du nombre moyen d'électrons transmis : il s'agit donc essentiellement d'un problème de comptage des électrons. Les hypothèses de départ de ce modèle sont les mêmes que celles de l'approche de scattering (cf. § 2.3.3) : un réservoir émet des électrons jusqu'au niveau de Fermi, et absorbe sans aucune réflexion les électrons qu'il reçoit. Par ailleurs, on considérera toujours des fréquences basses devant le temps de transit des électrons :  $\omega \ll 1/(2\pi\tau)$ ,  $\tau$  étant le temps que met un électron pour traverser la structure.

Le schéma de principe de l'expérience est donné sur la figure 3.3 : l'échantillon est connecté à deux réservoirs par des fils unidimensionnels parfaits<sup>7</sup>, et il est représenté par une matrice de scattering  $S$ . Une tension continue est appliquée entre les deux réservoirs afin d'imposer le passage du courant. Des

---

<sup>7</sup>On appelle fil unidimensionnel parfait un fil unidimensionnel qui transmet les différents modes électroniques qu'il contient avec une transmission unité (voir la discussion du paragraphe 2.3.3).

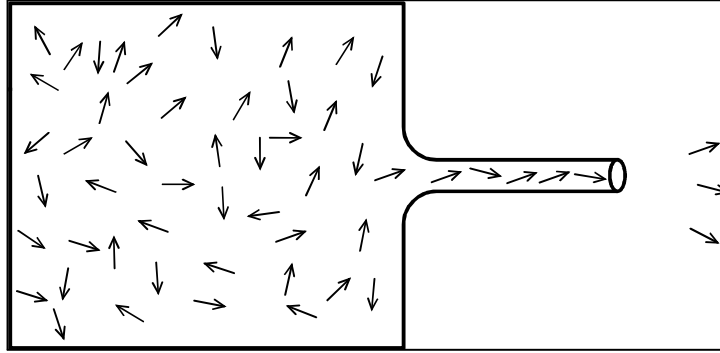


FIG. 3.2 – Schéma de l'expérience de Shot-Noise avec des particules classiques : le réservoir est à l'équilibre thermodynamique, le "guide d'ondes" a une transmission  $T$ . De plus, on suppose que la fuite est négligeable, et en particulier qu'elle ne perturbe pas l'équilibre du réservoir.

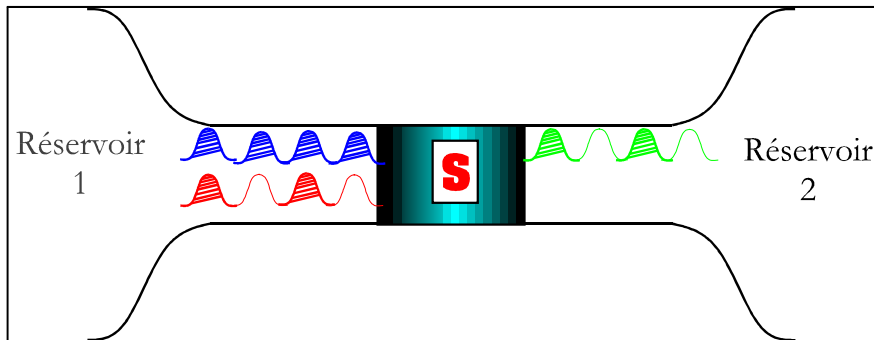


FIG. 3.3 – Décomposition en paquets d'ondes : le réservoir 1 émet des paquets d'ondes vers le point-contact, schématisé par une matrice de scattering  $S$ . À température nulle, tous les états sont occupés jusqu'au niveau de Fermi. Le point-contact a pour effet de partitionner les paquets d'ondes incidents : certains sont transmis vers le réservoir 2 (hachurés), les autres sont réfléchis. Même à température nulle, tous les états ne sont donc plus occupés dans le faisceau transmis, ce qui génère du Shot-Noise.

paquets d'ondes arrivent des fils unidimensionnels vers l'échantillon à une cadence  $1/\tau$ . On construit ces paquets d'ondes à partir d'ondes planes, chaque onde plane pouvant être occupée par deux électrons de spins opposés :

$$\psi^n(z, t) = \int_{E-\Delta E}^{E+\Delta E} dE' \frac{1}{\Delta E} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{dk}{dE}} e^{ik_{E'} z - i \frac{E'}{\hbar} (t+n\tau)}$$

avec  $\tau = 2\pi\hbar/\Delta E$ . On peut montrer que ces paquets d'ondes forment bien une base complète pour les modes électroniques des fils unidimensionnels parfaits [57]. Cependant, comme ceci n'est pas nécessaire à la suite du raisonnement, nous ne le ferons pas ici ; le point important est de pouvoir avoir une décomposition en paquets d'ondes qui arrivent à intervalles réguliers sur l'échantillon (figure 3.3).

La densité spectrale de bruit est obtenue par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation courant-courant (cf. annexe A.1.3) :

$$S_I(\nu) = 4 \int_0^\infty d\tau \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T dt I(t) I(t+\tau) \right] \right\} \cos(2\pi\nu\tau) \quad (3.2)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{T} \langle |I(2\pi\nu)|^2 \rangle \right] \quad (3.3)$$

Le courant s'exprime par :

$$I(t) = \sum_n j(t - n\tau) g_n$$

Le coefficient  $g_n$  vaut 1 si l'électron est transmis,  $-1$  s'il est réfléchi, et 0 si le paquet d'ondes incident était vide. À partir de cette définition, on obtient pour la transformée de Fourier du courant<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} I(2\pi\nu) &= \sum_n g_n j(2\pi\nu) e^{i2\pi\nu n\tau} \\ \Rightarrow \langle |I(2\pi\nu)|^2 \rangle &= e^2 \sum_{m,n} \langle g_m g_n \rangle e^{i2\pi\nu\tau(m-n)} \\ &= e^2 \sum_n g_n^2 \end{aligned}$$

Le terme  $g_n g_m$  s'annule pour  $m \neq n$  parce qu'il n'y a aucune corrélation entre l'état d'occupation de deux paquets d'ondes arrivant à des instants différents.

---

<sup>8</sup>Pour passer de la ligne 2 à la ligne 3 de l'expression suivante, on considère qu'à basse fréquence,  $j(2\pi\nu) = e$  : ce terme correspond à la transmission (ou à la réflexion) *totale* d'un électron (à des fréquences élevées, il faudrait aussi considérer le cas où un électron n'aurait pas le temps d'être complètement transféré).



### 3.2. THÉORIE DU BRUIT DE GRENAILLE DANS LES CONDUCTEURS MÉSOSCOPIQUES 53

Le bruit s'obtient finalement en combinant cette dernière expression avec l'équation 3.2, et en utilisant le fait qu'il y a  $T/\tau$  paquets d'ondes arrivant sur l'échantillon dans un intervalle de temps  $T$  :

$$S_I(\nu) = \frac{2e^2 \Delta E}{\pi \hbar} \langle g^2 \rangle$$

Nous verrons que cette relation redonne bien le bruit d'équilibre (bruit Johnson). Si on veut étendre cette approche au bruit hors-équilibre, il est nécessaire de remplacer dans les relations précédentes  $I(t)$  par  $I(t) - \langle I \rangle$ . On obtient alors une densité spectrale de bruit dans l'intervalle de fréquences  $[\nu, \nu + \delta\nu]$ , et pour les électrons compris dans une bande d'énergie  $\Delta E$  :

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} = \frac{2e^2 \delta\nu \Delta E}{\pi \hbar} \langle g^2 - \langle g \rangle^2 \rangle \quad (3.4)$$

On voit donc que, *via* le terme  $g$ , le calcul du bruit par l'approche de paquets d'ondes se réduit à un comptage des électrons : est-ce que le paquet d'ondes incident est occupé, et si oui, l'électron est-il transmis ou réfléchi ?

#### Bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique

**Cas à un canal** Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas où un seul canal est présent dans les fils ; ce cas s'applique, par exemple, à un contact ponctuel quantique dans le régime tunnel, et jusqu'au premier plateau de conductance. Le réservoir de droite est au potentiel chimique  $\mu_1$ , avec une distribution  $f_1$ , celui de gauche au potentiel chimique  $\mu_2$  avec une distribution  $f_2$ . Il s'agit donc d'énumérer les différentes possibilités pour  $g$  :

1. La probabilité pour que le paquet d'ondes venant de la droite *et* celui venant de la gauche soient occupés est donnée par  $f_1 f_2$ . Dans ce cas, il n'y a au total aucun courant :  $g = 0$ .
2. La probabilité pour que le paquet d'ondes venant de la droite *et* celui venant de la gauche soient vides est donnée par  $(1 - f_1)(1 - f_2)$ . Le courant total est nul dans ce cas aussi :  $g = 0$ .
3. Un électron, porté par un paquet d'ondes arrivant de la gauche, est transféré du côté droit<sup>9</sup>. La probabilité correspondante à ce processus est  $f_1(1 - f_2)T$ , et  $g = 1$ .
4. Si l'électron considéré au cas précédent est réfléchi, on a  $g = 0$ , avec une probabilité  $f_1(1 - f_2)(1 - T)$ .

---

<sup>9</sup>On compte positivement les électrons venant de la gauche vers la droite. Il s'agit d'un choix arbitraire.

5. Un électron est transféré du côté droit vers le côté gauche. La probabilité vaut  $f_2 (1 - f_1) T$ , avec  $g = -1$ .
6. On peut envisager le même cas que précédemment, mais avec réflexion de l'électron. On a alors  $g = 0$  et une probabilité  $f_2 (1 - f_1) (1 - T)$ .

Le terme  $\langle g \rangle$  vaut  $f_1 (1 - f_2) T - f_2 (1 - f_1) T = T (f_1 - f_2)$ . On obtient donc pour les différents termes :

$$\langle g^2 - \langle g \rangle^2 \rangle = \begin{cases} 0 - (T (f_1 - f_2))^2 & \text{dans le cas 1} \\ 0 - (T (f_1 - f_2))^2 & \text{dans le cas 2} \\ 1^2 - (T (f_1 - f_2))^2 & \text{dans le cas 3} \\ 0 - (T (f_1 - f_2))^2 & \text{dans le cas 4} \\ (-1)^2 - (T (f_1 - f_2))^2 & \text{dans le cas 5} \\ 0 - (T (f_1 - f_2))^2 & \text{dans le cas 6} \end{cases}$$

Il suffit alors de sommer ces différents termes avec leurs poids statistiques respectifs :

$$\begin{aligned} \langle g^2 - \langle g \rangle^2 \rangle &= T (f_1 + f_2 - 2f_1 f_2) - (f_1 - f_2)^2 T^2 \\ &= 2T f_2 (1 - f_1) + T (f_1 - f_2) [1 - T (f_1 - f_2)] \end{aligned}$$

Finalement, pour obtenir l'expression du bruit de grenaille, on combine l'expression précédente avec la relation 3.4 :

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} &= \frac{4e^2 \delta\nu}{\pi \hbar} \int T(E) T f_2 (1 - f_1) dE \\ &\quad + \int T(E) (f_1 - f_2) [1 - T(E) (f_1 - f_2)] dE \quad (3.5) \end{aligned}$$

Dans la suite, on considérera que la transmission est indépendante de l'énergie (ceci est vrai dans la gamme de tensions et de températures auxquelles nous avons fait nos expériences<sup>10</sup>).

Deux cas-limite simples peuvent être considérés dans un premier temps :

- Si la température est très supérieure à la tension appliquée,  $\theta \gg (\mu_1 - \mu_2) / k_B$ , le deuxième terme devient négligeable devant le premier (le “ recouvrement ” des distributions  $f_2$  et  $(1 - f_1)$  transfert plus de porteurs que la tension appliquée). L'expression 3.5 se réduit, après intégration, à :

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} &= \frac{4e^2 \delta\nu}{\pi \hbar} k_B \theta T \\ &= 4k_B \theta G \delta\nu \end{aligned}$$

---

<sup>10</sup>Nous verrons que cette condition n'est en fait pas simple à assurer expérimentalement. D'autres expériences à plus haute température et plus forte tension [58, 59] ont montré des déviations à la théorie du Shot-Noise quantique.

On retrouve donc l'expression du bruit thermique (bruit d'équilibre). Il s'agit du bruit dans le faisceau émis par le réservoir. Ceci constitue une validation forte de l'approche par paquets d'ondes, et par là de l'approche de scattering [52], même si le résultat n'est pas surprenant en soi : si l'interprétation de la conductance en termes de transmission est valable, on doit de la même façon pouvoir retrouver le bruit Johnson, qui est fondamentalement lié à la conductance.

- Dans l'autre limite, si la température est très inférieure à la tension appliquée,  $\theta \ll (\mu_1 - \mu_2)/k_B$ , le premier terme devient négligeable (tous les états occupés dans le fil de gauche sont aussi occupés dans le fil de droite, et les électrons ne peuvent pas “tunnelé”). L'équation 3.5 se réduit alors à son second membre, qui peut s'évaluer aisément [14] dans la limite  $\theta \rightarrow 0$  :

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} = \frac{2e^2 \delta\nu}{\pi \hbar} (\mu_1 - \mu_2) T (1 - T) \quad (3.6)$$

C'est le bruit de partition proprement dit : à cause du principe de Fermi, le faisceau émis par le réservoir est totalement non-bruyant à température nulle. On voit qu'*un canal parfaitement transmis, de même qu'un canal parfaitement réfléchi, ne génère pas de bruit*. On retrouve bien le résultat obtenu au paragraphe 3.2.1 ; en particulier, il est important d'insister sur le fait que cette annulation du bruit pour un canal complètement transmis ou réfléchi est une propriété propre aux fermions [48, 60]. Le bruit est donc une mesure directement reliée à la statistique des porteurs [13], et donc à leur aspect corpusculaire, contrairement à la conductance, qui ne mesure que la transmission d'une onde électronique. Si on applique ce modèle à des bosons, par exemple des photons dans un guide d'ondes, les termes  $f_1 (1 - f_2)$  et équivalents sont remplacés par des termes  $f_1 (1 + f_2)$  ; la partition d'un faisceau de photons entraîne donc une *augmentation* du bruit de grenaille, à l'opposé de ce qu'on trouve pour des électrons [9, 10, 11].

On peut réécrire l'équation 3.6 en faisant apparaître explicitement le courant :

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} = 2e \langle I \rangle \delta\nu (1 - T)$$

On reconnaît alors l'expression du Shot Noise classique (cf. § 3.1), mais multipliée par un facteur de réduction  $(1 - T)$  ; le bruit de grenaille dans un conducteur électronique quantique<sup>11</sup> est donc toujours inférieur au bruit de grenaille classique. Avec la condition  $T \ll 1$ , on retrouve la limite du bruit

---

<sup>11</sup>Pour observer cette réduction du Shot-Noise, il faut un système de fermions *qui soit quantiquement cohérent*. Si cette condition n'est pas difficile à obtenir pour des photons, cela n'est possible pour des électrons que dans un système mésoscopique.

de grenaille classique :  $\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} = 2e \langle I \rangle \delta\nu$ . Ce résultat peut se comprendre simplement : lorsque la barrière est très peu transparente, les électrons qui la traversent ne voient que très peu d'états occupés, et ils sont donc libres de fluctuer ; on retrouve une sorte de gaz “ dégénéré ” d'électrons, qui n'est plus sensible à la statistique de Fermi-Dirac.

En-dehors de ces deux limites simples, il faut faire un calcul exact de l'expression 3.5. On obtient alors [14] :

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} = & \frac{4e^2\delta\nu}{\pi\hbar} k_B\theta + \frac{2e^2\delta\nu}{\pi\hbar} T(1-T)(\mu_1 - \mu_2) \\ & + \frac{4e^2\delta\nu}{\pi\hbar} T(1-T) k_B\theta \left[ \frac{\frac{\mu_1 - \mu_2}{k_B\theta}}{e^{\frac{\mu_1 - \mu_2}{k_B\theta}} - 1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour alléger cette expression, on peut introduire les unités de “ température de bruit ”. On définit la température de bruit  $\theta^*$  par<sup>12</sup> :  $\theta^* = \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu}}{4k_B G \delta\nu}$ . En réorganisant les termes de l'équation 3.7, et en posant  $eV_{DS} = (\mu_1 - \mu_2)$ , on obtient [13, 60, 48] :

$$\theta^* = \theta \left\{ 1 + (1-T) \left( \frac{\frac{eV_{DS}}{2k_B\theta}}{\tanh\left(\frac{eV_{DS}}{2k_B\theta}\right)} - 1 \right) \right\} \quad (3.8)$$

On retrouve aisément dans cette relation les deux limites envisagées précédemment. Si  $eV_{DS} \ll 2k_B\theta$ , le deuxième terme s'annule, et on trouve bien  $\theta^* = \theta$ , c'est à dire le bruit thermique. Si au contraire  $eV_{DS} \gg 2k_B\theta$ ,  $\tanh\left(\frac{eV_{DS}}{2k_B\theta}\right) \rightarrow 1$  et on trouve  $\theta^* = \theta \frac{eV_{DS}}{2k_B\theta} (1-T)$ , c'est à dire le bruit de grenaille classique réduit par un facteur  $(1-T)$ . La relation 3.8 montre bien que l'on passe continuellement du bruit d'équilibre pour  $eV_{DS} \ll 2k_B\theta$  au bruit de grenaille, réduit par un facteur  $(1-T)$ , pour  $eV_{DS} \gg 2k_B\theta$ .

**Cas à plusieurs canaux** Dans le cas général, plusieurs canaux sont présents dans les fils, et on doit envisager un couplage entre ces différents modes. Ceci a été traité dans la littérature [14]. Dans le cas qui nous occupe, celui du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique, la situation est plus simple puisqu'en première approximation, on peut considérer qu'il n'y a pas de couplage entre les modes. Chaque mode génère alors son propre bruit, et les bruits dus aux différents modes s'ajoutent. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu qu'un canal complètement transmis, de même qu'un canal complètement réfléchi, ne génère pas de bruit. Dans un contact ponctuel

<sup>12</sup>En particulier, dans ces unités, le bruit Johnson s'exprime par :  $\theta^* = \theta$ .

quantique, les différents modes sont transmis successivement (cf. § 2.3.3), comme dans un guide d'ondes dont on varierait continuellement la largeur : il y d'abord un mode évanescent, dont la transmission augmente jusqu'à  $T_1 = 1$ , puis le deuxième mode commence à être transmis, on a alors  $T_1 = 1$ ,  $0 \leq T_2 \leq 1$ . Quand le point-contact continue à s'élargir, le deuxième mode est complètement transmis, et le troisième mode est évanescent :  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 1$ ,  $0 \leq T_3 \leq 1$ , etc. Si on ne considère aucun couplage entre ces modes, la relation 3.8 peut se généraliser facilement et on obtient :

$$\theta^* = \theta \left\{ 1 + \frac{\sum_n T_n (1 - T_n)}{\sum_n T_n} \left( \frac{\frac{eV_{DS}}{2k_B\theta}}{\tanh\left(\frac{eV_{DS}}{2k_B\theta}\right)} - 1 \right) \right\} \quad (3.9)$$

$n$  étant un indice qui repère les différents modes.

On voit donc que le bruit devrait osciller en fonction de la largeur du contact ponctuel quantique : il s'annule sur les plateaux (il n'y a que des modes complètement transmis ou complètement réfléchis), et est maximum entre les plateaux (un mode a une transmission  $1/2$ , le terme  $T(1 - T)$  est donc maximum).

Expérimentalement, le contact ponctuel quantique est un système-modèle pour tester cette théorie. En effet, on peut contrôler le nombre de modes présents dans le système, et varier leur transmission continuellement, et ce de façon très simple, en jouant sur une tension de grille. C'est donc ce type d'échantillons que nous utiliserons.

### 3.2.3 Perspectives

Jusque-là, nous nous sommes concentrés sur le bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique, car ce conducteur mésoscopique constitue un cas d'école, tant sur le plan de la théorie que sur le plan expérimental : en effet, dans un tel système, on peut contrôler le nombre de canaux, et en particulier, on peut avoir accès au cas où il n'y a qu'un seul canal, et varier sa transmission. Ceci permet de confronter la limite la plus simple de la théorie avec une réalité expérimentale.

Cependant, on peut étendre ces notions à d'autres conducteurs : structures à plusieurs contacts [14, 13], systèmes diffusifs [61, 62, 63, 64, 65], jonctions métal normal-supraconducteur [66, 67, 68], effet Hall quantique entier [13] et fractionnaire [69, 70, 16]. Dans tous les cas, il s'agit en fait d'étendre les notions vues précédemment ; par exemple, pour un système diffusif, on sait que la distribution des transmissions entre les canaux est

bimodale [66] : les canaux sont soit très bien transmis, soit ont une transmission nulle. Le bruit est alors obtenu comme une moyenne sur la distribution des canaux [61], et on trouve un facteur de réduction qui vaut  $1/3$  :

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\delta\nu} = \frac{1}{3} 2e \langle I \rangle \delta\nu$$

Les conducteurs faisant intervenir plusieurs branches (par exemple des conducteurs en forme de  $Y$ ) permettent de mettre en évidence les corrélations dues à la statistique de Pauli : là où Hanbury-Brown et Twiss [9, 10, 11] avaient trouvé une corrélation positive entre les bruits mesurés dans les deux branches d'un faisceau de photons séparés grâce à une lame semi-réfléchissante, on devrait trouver une corrélation négative si on faisait la même expérience avec des électrons. Enfin, dans une jonction métal normal-supraconducteur, on s'attend à un doublement du bruit, dû au passage de paires de Cooper [67], mais toujours avec un facteur de réduction faisant intervenir une matrice de scattering [14]. Le cas de l'effet Hall quantique entier permet lui de faire intervenir des termes de phase [13].

Tous ces effets n'ont pas encore été vus expérimentalement ; cependant, la “ brique ” de base, quel que soit le système considéré, reste fondamentalement la réduction du bruit de grenaille pour un canal. Il est donc important, dans un premier temps, d'arriver à mesurer expérimentalement l'effet de réduction du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique ; ensuite, les expériences sur des systèmes plus complexes pourront être abordées avec une plus grande confiance dans la théorie.

# Chapitre 4

## Mesure de la réduction du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique

### 4.1 Échantillons

Les échantillons que nous avons utilisés sont réalisés à partir d'hétérostructures d'Arséniure de gallium (cf. § 1.2.2) ; il s'agit donc de gaz d'électrons bidimensionnels de très haute mobilité, que l'on confine ensuite à 1 ou 0 dimension grâce à des grilles déposées à la surface. La croissance est effectuée par épitaxie par jets moléculaires, à partir d'un substrat d'Arséniure de gallium semi-isolant, par Bernard Etienne, au Laboratoire de Microstructures et Micrlectronique du CNRS, à Bagneux. La complexité de cette technique ne nous permet pas, ici, de rentrer dans les détails [28, 71]. La figure 4.1 représente schématiquement nos structures : le gaz d'électrons se trouve à  $100nm$  de la surface, la mobilité est de  $2 \cdot 10^6 cm^2 V^{-1} s^{-1}$  à  $4.2K$ , pour une densité surfacique  $n_S = 1.1 \cdot 10^{11} cm^{-2}$ . Ceci conduit à une énergie de Fermi  $E_F = 45K$ , avec un libre parcours élastique, qui donne la limite de la longueur de cohérence de phase,  $l_e = 12\mu m$ .

Le mesa est obtenu par gravure humide [39]. Les contacts ohmiques sont ensuite déposés ; il s'agit d'un alliage AuGeNi [31] qui, grâce à un chauffage sous atmosphère d'Hydrogène, diffuse jusqu'au gaz d'électrons. Enfin, des grilles sont déposées à la surface de l'échantillon (technique de la “ grille fendue ”), afin de définir électrostatiquement la forme du gaz d'électrons. Pour des raisons historiques, ces grilles ont la forme d'une boîte quantique, c'est à dire deux points-contact en série, la boîte étant fermée par une troisième grille. La figure 4.2 est une photographie prise au microscope électronique

d'un de nos échantillons.

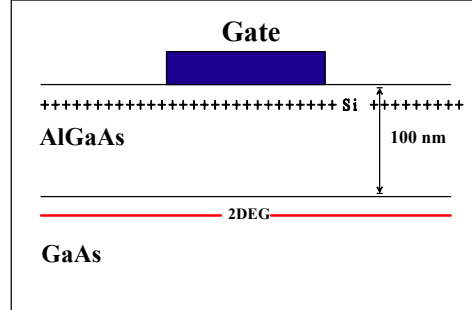


FIG. 4.1 – Coupe schématique de nos structures : le gaz d'électrons se trouve à  $100\text{nm}$  de la surface. Des grilles sont évaporées afin de confiner électrostatiquement les électrons en appliquant une tension négative. Il faut remarquer que les donneurs ionisés ne sont pas dans le même plan que les électrons, ce qui augmente leur mobilité.

Pour confiner le gaz d'électrons, on polarise négativement les grilles ; les tensions appliquées sont de l'ordre de quelques centaines de microvolts. Le gaz d'électrons prend alors approximativement la forme des grilles. Il faut cependant noter que le potentiel vu par le bord du gaz d'électrons est beaucoup plus lisse et régulier que la forme géométrique de la grille [72].

## 4.2 Dispositif expérimental

### 4.2.1 Principe de l'expérience

#### Système de mesure

Toutes nos expériences ont été effectuées dans un cryostat à dilution, dont la température de base est de  $20\text{mK}$ . Pour que la température effective des électrons soit bien celle de la dilution, il est nécessaire de s'assurer que les fils arrivant sur les contacts ohmiques véhiculent le moins possible de tensions parasites. Pour cela, une méthode simple, quoiqu'efficace, consiste à s'assurer du mieux possible de la continuité du blindage électrique : les amplificateurs sont donc placés dans une boîte, et ils sont reliés à l'échantillon par des câbles coaxiaux. La connectique est choisie étanche aux radiofréquences (normes *SMA*). Par ailleurs, les câbles coaxiaux qui descendent sur l'échantillon ont été conçus pour assurer un blindage efficace des radiofréquences. On peut ainsi s'assurer que la température effective des électrons est de  $40\text{mK}$  [73].



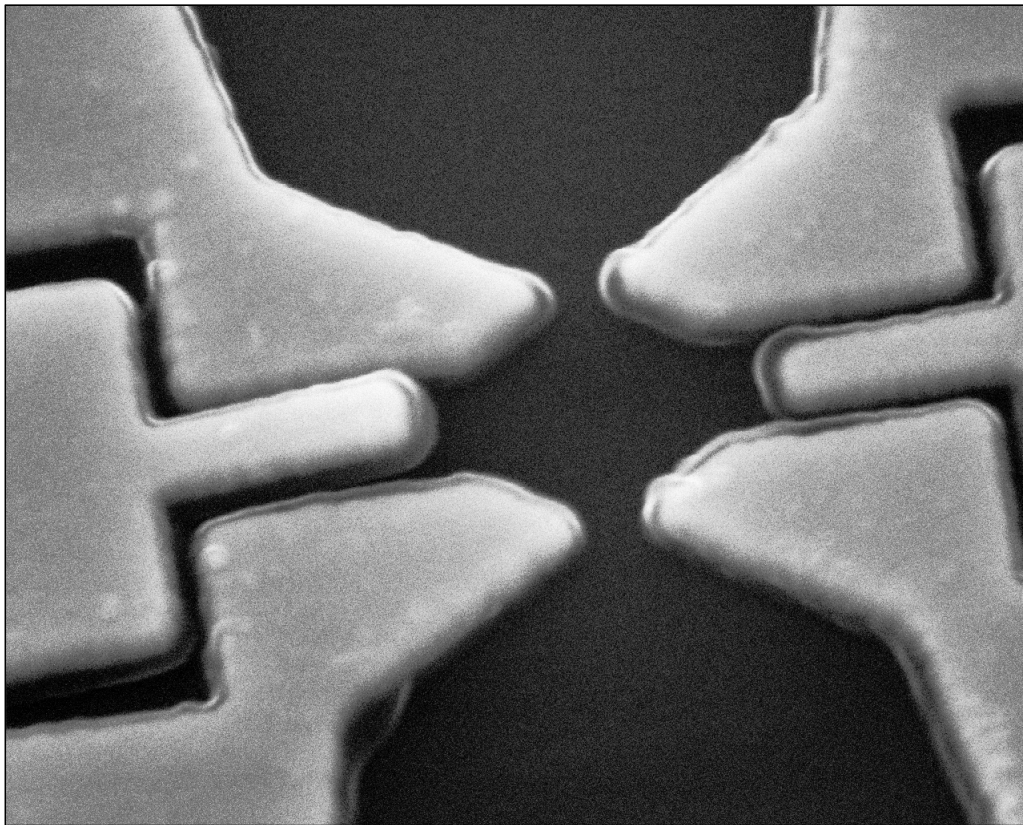


FIG. 4.2 – Photographie prise au microscope électronique d'une boîte quantique qui a servi dans nos expériences. Le diamètre de la boîte est d'environ  $1\mu m$ , la distance entre les deux pointes des points-contact de  $300nm$ . Dans nos expériences, nous n'utiliserons qu'un seul des deux points-contacts.

L'échantillon est alimenté en source de courant par une résistance de  $100M\Omega$ , et la chute de potentiel aux bornes du point-contact est détectée grâce à deux amplificateurs commerciaux placés à température ambiante. Le signal est ensuite envoyé sur un analyseur de spectres, qui effectue une transformée de Fourier rapide (*FFT*), et qui calcule la corrélation entre les signaux reçus sur les deux voies.

### Comparaison avec le bruit Johnson-Nyquist

Pour obtenir une comparaison plus précise avec la théorie, nous avons mis au point une technique qui permet de mesurer le bruit directement en unité de température effective (cf. équ. 3.8). Pour cela, il faut en fait effectuer deux mesures de bruit :

- Dans un premier temps, on mesure le bruit à basse température, en faisant varier le courant. On obtient alors la courbe  $S_V(V_{ds})$ .
- Dans un deuxième temps, on mesure le bruit à tension nulle, et on fait varier la température ; on obtient la courbe  $S_V(\theta)$ . Cette courbe nous permet de savoir à quelle température équivalente de bruit correspond le bruit que l'on a mesuré dans la première mesure.

Le principal intérêt de cette technique, par rapport à celle qui consisterait à diviser la courbe  $S_V(V_{ds})$  par le facteur  $4k_B R$ , est de nous affranchir du bruit “ de fond ” dû à la chaîne de mesure. Un autre intérêt est d'avoir une mesure absolue, c'est à dire une mesure qui ne dépende pas de la valeur précise du gain des amplificateurs. Autrement dit, on a éliminé de l'expérience tous les paramètres ajustables ; il sera donc possible de faire une comparaison directe avec la théorie. La précision de la mesure n'est plus alors limitée que par la précision du thermomètre et les erreurs statistiques [60].

### 4.2.2 Ordres de grandeur

Pour être certain de la faisabilité d'une telle expérience, il faut d'abord calculer les ordres de grandeur de ce que l'on s'attend à détecter, et les comparer à la précision théorique de la chaîne de mesure.

#### Niveau du signal

Le bruit de grenaille que l'on veut mesurer est un bruit en courant, que l'on transforme en bruit en tension en utilisant la résistance de l'échantillon même. Du point de vue de la physique, cette technique est tout à fait légitime si on reste à des fréquences basses comparées au temps de transit

de l'électron dans la structure ; c'est d'ailleurs une des hypothèses du modèle théorique (cf. § 3.2.2). Quelles sont donc les contraintes auxquelles nous avons à faire face ? Si on veut garantir que la transmission soit effectivement indépendante de l'énergie, il faut que la gamme d'énergies dans laquelle on travaille soit faible [60], par exemple inférieure à  $1K$ .

- Pour la température proprement dite de l'échantillon, la réfrigération à dilution et le filtrage de radiofréquences par les “ micro-coax ” que nous avons mis au point [73] nous garantissent une température de l'ordre de  $30mK$ , donc bien inférieure au Kelvin.
- Du point de vue de la fréquence, ceci nous impose de travailler en-dessous de  $20GHz$ . C'est en fait le choix expérimental que nous avons fait. D'ailleurs, travailler dans le domaine des radiofréquences aurait nécessité un tout autre système expérimental [58, 59]. Par contre, on devient sensibles au bruit basse fréquence des appareils de mesure, ainsi qu'aux bruits acoustiques.
- Il faut que les tensions développées aux bornes de l'échantillon soient inférieures<sup>1</sup> à  $100\mu V$ . Comme nous travaillons en source de courant, ceci impose une limite sur le courant maximal que l'on peut faire passer dans la structure, et donc directement sur le signal que l'on veut mesurer. La résistance de l'échantillon est donnée par  $R = \frac{h}{2e^2}T$ , et le bruit que l'on veut mesurer par :

$$\begin{aligned} S_V &= R^2 2eI (1 - T) = R 2eV (1 - T) = \frac{hV}{e} \frac{(1 - T)}{T} \\ &= 4.136 \cdot 10^{-19} \frac{(1 - T)}{T} [100\mu V] V^2 / Hz \end{aligned}$$

Pour des raisons de coupure capacitive (les “ micro-coax ” ont chacun une capacité d'environ  $350pF$ ), on ne peut explorer que des transmissions jusqu'à  $T = 0.15$ . Dans cette configuration, on s'attend donc à un signal de  $\sqrt{4.136 \cdot 10^{-19} \frac{(1-0.15)}{0.15}} = 1.53nV/\sqrt{Hz}$ . Dans l'autre limite, si on prend une transmission de  $0.75$ , on s'attend à un signal de  $0.371nV/\sqrt{Hz}$ .

Il faut noter qu'un autre groupe a entrepris cette expérience en même temps que nous [58, 59], mais en regardant le bruit dans le domaine des radiofréquences ( $10 - 20GHz$ ). Ce choix leur était imposé par des considérations techniques (leur système de réfrigération ne descendait que jusqu'à  $1.5K$ ), et physiques : ils pensaient que le bruit basse fréquence de tout système d'amplification rendait impossible une telle mesure ; en effet, dans le passé, d'autres groupes avaient tenté des mesures de bruit [44, 45, 46] sur

---

<sup>1</sup>On peut garder en tête la correspondance approximative suivante :  $1\mu V \sim 10mK$ .

des systèmes mésoscopiques, mais n'avaient pas réussi à extraire le signal pertinent du bruit en  $1/f$ . Cependant, ils ont alors dû appliquer des tensions de l'ordre du  $mV$ , et n'ont pas retrouvé le bruit de grenaille classique dans la limite des faibles transmissions.

### Système de mesures

Le système de mesures que nous avons utilisé est celui décrit sur la figure 4.3. L'échantillon est polarisé en courant, *via* une résistance de  $100M\Omega$ . La chute de potentiel aux bornes du point-contact est mesurée simultanément par deux amplificateurs séparés, et un analyseur de spectres calcule la corrélation des deux signaux. Pour se convaincre de la faisabilité de l'expérience, il faut donc calculer le bruit généré par les différents appareils, la précision attendue pour une telle mesure, et comparer cela avec le signal que l'on veut mesurer.

**Précision de la mesure** L'incertitude de la mesure est essentiellement liée à la précision que l'on peut attendre de l'analyseur de spectres. Celle-ci est relativement simple à évaluer ; si le bruit de grenaille est un bruit gaussien, l'écart-type se calcule selon la formule :

$$\sigma = \frac{\langle S_V \rangle}{\sqrt{N}}$$

où  $N$  est le nombre d'essais que l'on réalise. L'analyseur de spectres permet d'accumuler un certain nombre de spectres et d'en calculer la moyenne. Pour améliorer encore la précision, on moyenne sur une plage de fréquences. Par exemple, si la bande passante de l'analyseur est de  $1Hz$ , et que l'on fait une moyenne entre  $200Hz$  et  $300Hz$  cela revient à faire encore 100 essais supplémentaires. Typiquement, si on fait 4000 moyennages, et que l'on moyenne ensuite sur une plage de  $200Hz$ , avec une bande passant de  $1Hz$ , on obtient  $N = 200 \times 4000$ . Le fait de mesurer deux fois le signal et de calculer la corrélation permet de gagner encore un facteur 2. On obtient donc finalement [43]  $N = 200 \times 4000 \times 2 = 16 \cdot 10^5$ . En prenant une valeur de  $4nV/\sqrt{Hz}$  pour  $\langle S_V \rangle$ , correspondant au signal et aux bruits parasites (voir paragraphe suivant) on arrive à une résolution :

$$\sigma \sim 100pV/\sqrt{Hz}$$

**Bruits additionnels** Dans le système expérimental de la figure 4.3, il y a différentes sources de bruit dues aux appareils de mesure. Ces bruits viendront s'ajouter au bruit de grenaille, qui est lui intrinsèque à l'échantillon,

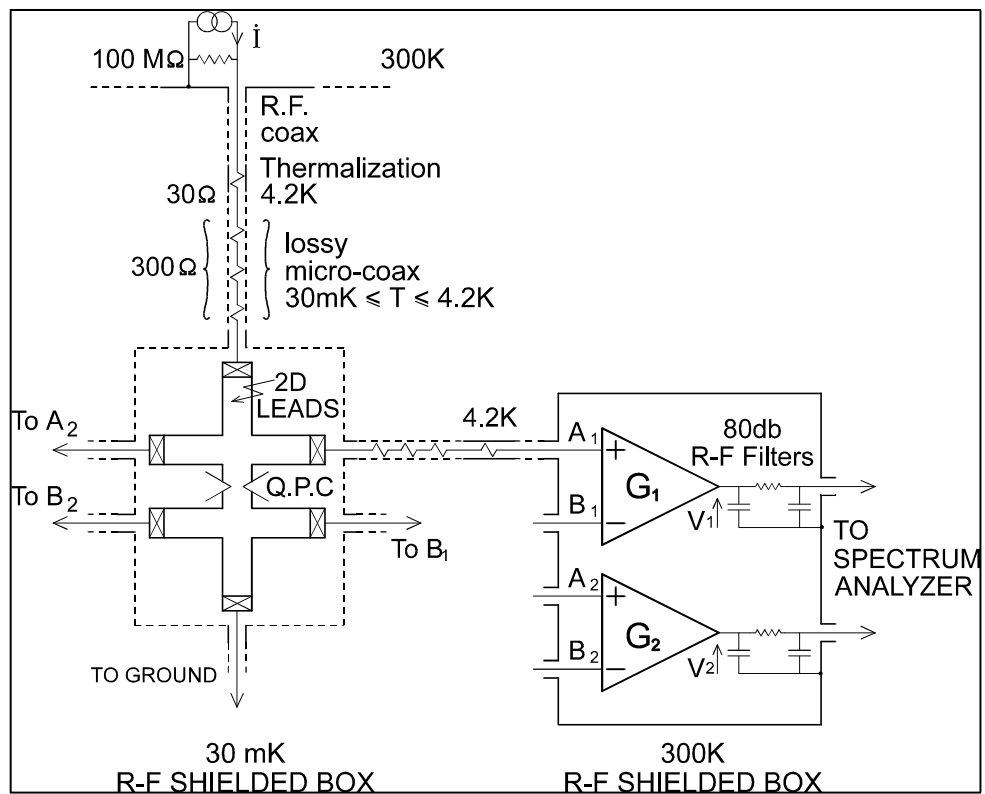


FIG. 4.3 – Schéma de principe de notre expérience : l'échantillon est polarisé en courant par une résistance de  $100\text{ M}\Omega$ , la chute de potentiel aux bornes du point-contact est détectée par deux amplificateurs différents, et un analyseur de spectres en calcule la corrélation.

et peut éventuellement le masquer ; il faut donc pouvoir connaître quantitativement leur niveau.

La source de courant est constituée d'une résistance de  $100M\Omega$  que l'on polarise en tension par une pile (celle-ci ne génère pas de bruit). Elle injecte donc dans l'échantillon son bruit en courant, qui vaut  $\frac{4k_B\theta}{R}$ . Comme cette source est à température ambiante, on obtient :

$$S_I = 1.65 \cdot 10^{-28} A^2/Hz$$

Comme il s'agit d'un bruit en courant, on y sera d'autant plus sensible que l'impédance sera élevée. Pour les deux cas-limite envisagés au paragraphe 4.2.2, on obtient pour le bruit en tension :

$$\begin{aligned} S_V &= R_{Ech.}^2 \frac{4k_B\theta}{R} \\ &= \left( \frac{h}{2e^2} \frac{1}{T} \right)^2 \frac{4k_B\theta}{R} \\ &= \begin{cases} 1.227 \cdot 10^{-18} V^2/Hz \text{ pour } T = 0.15 \\ 4.906 \cdot 10^{-20} V^2/Hz \text{ pour } T = 0.75 \end{cases} \end{aligned}$$

soit  $1.107nV/\sqrt{Hz}$  pour  $T = 0.15$  et  $0.221nV/\sqrt{Hz}$  pour  $T = 0.75$ .

Les amplificateurs génèrent eux aussi à la fois un bruit en courant et un bruit en tension ; concrètement, ces bruits proviennent des résistances qui servent à polariser les grilles des *FET* d'entrée. Nous avons utilisé des amplificateurs commerciaux<sup>2</sup> à température ambiante, dont les caractéristiques de bruit mesurées, et qui concordent avec celles du constructeur, sont de  $1.4nV/\sqrt{Hz}$  pour le bruit en tension, et  $15fA/\sqrt{Hz}$  pour le bruit en courant. Cependant, la technique de mesure en corrélation nous permet de nous affranchir du bruit en tension ; le paramètre pertinent est donc le bruit en courant des amplificateurs.

**Mesure en corrélation** La technique de mesure que nous avons utilisée (figure 4.3), mesure la corrélation des signaux mesurés par deux chaînes d'amplification indépendantes. Le bruit détecté par chaque voie peut être décomposé de la façon suivante :

$$S_{V_{Tot_1}} = R_d^2 S_I + S_{V_{Ampli_1}} + R_d^2 S_{I_{Ampli_2}} + (R_d + R_{fil})^2 S_{I_{Ampli_1}}$$

<sup>2</sup>L'utilisation d'amplificateurs à froid n'aurait pas permis d'obtenir de meilleures caractéristiques de bruit. Par contre, le fait de les placer à côté de l'échantillon aurait permis d'avoir des fils moins longs, donc de réduire les capacités vers la masse et de pouvoir mesurer le bruit à plus hautes fréquences. Cependant, nous n'avons pas adopté cette technique, car elle entraîne d'autres complications (fonctionnement des *FET* à froid etc.).

où  $R_d$  est la résistance différentielle de l'échantillon,  $R_{fil}$  la résistance des câbles et du méso,  $S_I$  le bruit en courant que l'on cherche à détecter (bruit de grenaille),  $S_{V_{Ampli}}$  le bruit en tension de l'amplificateur ramené à l'entrée, et  $S_{I_{Ampli}}$  le bruit en courant de l'amplificateur ramené à l'entrée. L'autocorrélation que l'on calcule vaut donc :

$$\begin{aligned} \langle S_{V_{Tot1}} S_{V_{Tot2}} \rangle &= \left( R_d^2 S_I + S_{V_{Ampli_1}} + R_d^2 S_{I_{Ampli_2}} + (R_d + R_{fil})^2 S_{I_{Ampli_1}} \right) \\ &\quad \times \left( R_d^2 S_I + S_{V_{Ampli_2}} + R_d^2 S_{I_{Ampli_1}} + (R_d + R_{fil})^2 S_{I_{Ampli_2}} \right) \end{aligned}$$

Les bruits en courant des deux amplificateurs sont corrélés : en effet, ils sont détectés *via* l'échantillon, et se transforment donc en un bruit en tension aux bornes de l'échantillon qui est vu par les deux amplificateurs. Il en va de même pour le bruit de grenaille<sup>3</sup>. Par contre, les bruits en tension, qui sont générés par deux amplificateurs parfaitement indépendants, ont une corrélation nulle. Ceci nous permet donc d'éliminer le bruit en tension des amplificateurs, et en particulier leur composante basse fréquence (bruit en "1/f"), qui est en général dominante dans les gammes de fréquences où nous avons effectué nos mesures. Il reste donc dans la corrélation :

$$\langle S_{Tot1} S_{Tot2} \rangle = R_d^2 S_I + R_d (R_d + R_{fil}) (S_{I_{Ampli_1}} + S_{I_{Ampli_2}})$$

À cela s'ajoute le bruit en courant de la résistance de  $100M\Omega$  qui sert à polariser l'échantillon, que l'on note  $S_{I_{100M\Omega}}$ , et que l'on retrouve dans la corrélation de la même façon que le bruit en courant des amplificateurs. On obtient alors :

$$\langle S_{Tot1} S_{Tot2} \rangle = R_d^2 S_I + R_d^2 S_{I_{100M\Omega}} + R_d (R_d + R_{fil}) (S_{I_{Ampli_1}} + S_{I_{Ampli_2}}) \quad (4.1)$$

Il faut bien noter que le signal qui nous intéresse ne représente que le premier terme de cette expression. De plus, le bruit en tension des amplificateurs, s'il n'intervient plus dans l'expression finale de la corrélation, est quand même vu par l'analyseur de spectres qui calcule la corrélation. Autrement dit, on le retrouve dans le rapport signal sur bruit de la mesure.

Que vaut l'expression 4.1 ? Si on prend les valeurs de  $15fA/\sqrt{Hz}$  pour le bruit en courant de la source de courant et des amplificateurs<sup>4</sup>, on obtient un bruit en courant additionnel total<sup>5</sup> de  $23fA/\sqrt{Hz}$ . Pour une transmission

<sup>3</sup>Ce qui nous permet d'ailleurs de le mesurer.

<sup>4</sup>Cette valeur n'est pas un hasard : les *FET* d'entrée des amplificateurs sont polarisés par une résistance de  $100M\Omega$ .

<sup>5</sup>Ce sont les *puissances* de bruit qui s'ajoutent. On obtient donc un bruit en courant total qui vaut  $\sqrt{3} \times 15fA/\sqrt{Hz}$ .

$T = 0.15$ , on obtient pour ce bruit additionnel non désiré une valeur de  $1.98nV/\sqrt{Hz}$ , et  $0.396nV/\sqrt{Hz}$  pour une transmission de 0.75. Ces valeurs sont à comparer avec celles calculées au paragraphe 4.2.2 du signal auquel on s'attend.

## Conclusion

La principale conclusion que l'on peut tirer de l'étude du système expérimental est que la mesure de la réduction du bruit de grenaille est possible, quoique délicate. En effet, *les bruits additionnels, qui ne font pas partie du signal que l'on veut détecter, ont un niveau aussi important que la variation totale du bruit de grenaille à laquelle on s'attend lors de la mesure.* Comme ces bruits sont des bruits en courant, et qu'ils sont détectés *via* l'impédance de l'échantillon, il faudra donc veiller à garder celle-ci la plus constante possible. Pratiquement, on arrivera à la précision voulue en utilisant une technique de “ feed-back ” sur la grille.

Il existe une autre source de bruit dont nous n'avons pas parlé, mais qui peut être importante : il s'agit du bruit à  $50Hz$  et aux fréquences multiples de  $50Hz$  généré par le réseau *EDF*, et qui peut s'introduire dans le signal soit par un couplage inductif<sup>6</sup>, soit directement par un appareil branché sur l'échantillon. Pour remédier à ce problème, nous avons alimenté tous les appareils directement en contact avec l'échantillon, et en particulier les amplificateurs, par des batteries. De plus, ces batteries, ainsi que les amplificateurs, sont placés dans une boîte de Faraday qui écranthe le rayonnement électromagnétique. Le blindage radiofréquence ainsi réalisé nous a permis de réduire l'amplitude de ces signaux parasites à un niveau acceptable.

## 4.3 Résultats expérimentaux

### 4.3.1 Caractérisation du contact ponctuel quantique

La première mesure que nous avons faite est celle de la résistance du point-contact en fonction de la tension de grille. Ceci permet de caractériser l'échantillon : comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1, la mesure de la résistance est une mesure directe de la transmission [1].

La courbe 4.4 représente la conductance de l'échantillon, en unités du quantum de conductance  $2e^2/h$ , en fonction de la tension de grille  $V_g$ , à une

---

<sup>6</sup>C'est pour cette raison qu'il faut prendre un soin tout particulier à connecter correctement les appareils à la masse, et en particulier veiller à ce qu'il n'y ait qu'un seul point de masse pour tout le circuit.



température de  $38mK$ . Cette mesure est effectuée en utilisant une technique classique de mesure alternative au lock-in. Seule une des deux paires de grilles représentées sur la figure 4.2 est utilisée. On voit clairement apparaître les premiers plateaux de conductance. Cependant, ceux-ci ne sont pas aussi plats que ceux obtenus dans d'autres expériences [3, 4].

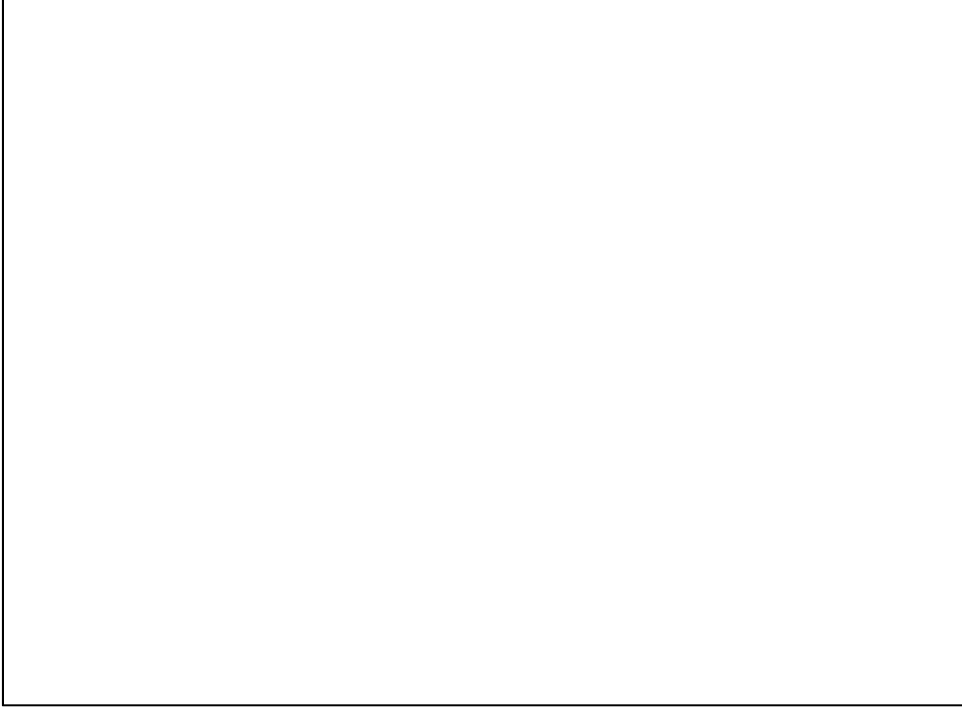


FIG. 4.4 – Variation de la conductance en fonction de la tension de grille pour le contact ponctuel quantique que nous avons utilisé. La température est la température de base de notre réfrigérateur à dilution.

On peut interpréter cette observation en invoquant le désordre présent à proximité du point-contact. Ce paramètre est difficile à contrôler : même dans les meilleures hétérojonctions, comme celles que nous avons utilisées, il reste toujours un désordre résiduel. La position de ces impuretés est complètement aléatoire. Le fait de choisir un “ bon ” échantillon sur la plaquette relève donc de la loterie. Idéalement, un électron émergeant du point-contact est immédiatement absorbé, c’est à dire qu’il subit un choc inélastique qui lui fait perdre sa cohérence de phase : c’est le principe de réservoirs évoqué au paragraphe 2.3.3. Si une impureté est présente à proximité du point-contact, elle peut réfléchir les électrons vers le point-contact avant qu’ils ne soient absorbés par les réservoirs. Ceci provoque des résonances de transmission,

que l'on peut voir sur la courbe  $G(V_g)$ . On peut supprimer ces résonances en appliquant une tension continue (ou, de façon équivalente, en chauffant l'échantillon) : sur la figure 4.5, un courant continu ( $100pA$ ,  $1nA$  et  $10nA$ ) a été ajouté au signal alternatif et les plateaux de conductance sont “ lissés ” par la tension. C'est pour cette raison que dans l'article original rapportant la première observation de la quantification de la conductance dans un contact ponctuel quantique [3], les expériences étaient faites à  $300mK$ .

Pour nos expériences sur le bruit de grenaille, nous explorerons les transmissions allant du régime tunnel ( $T = 0.15$ ) au deuxième plateau de conductance ( $T_1 = T_2 = 1$ ). Ces points sont indexés sur la figure 4.4.

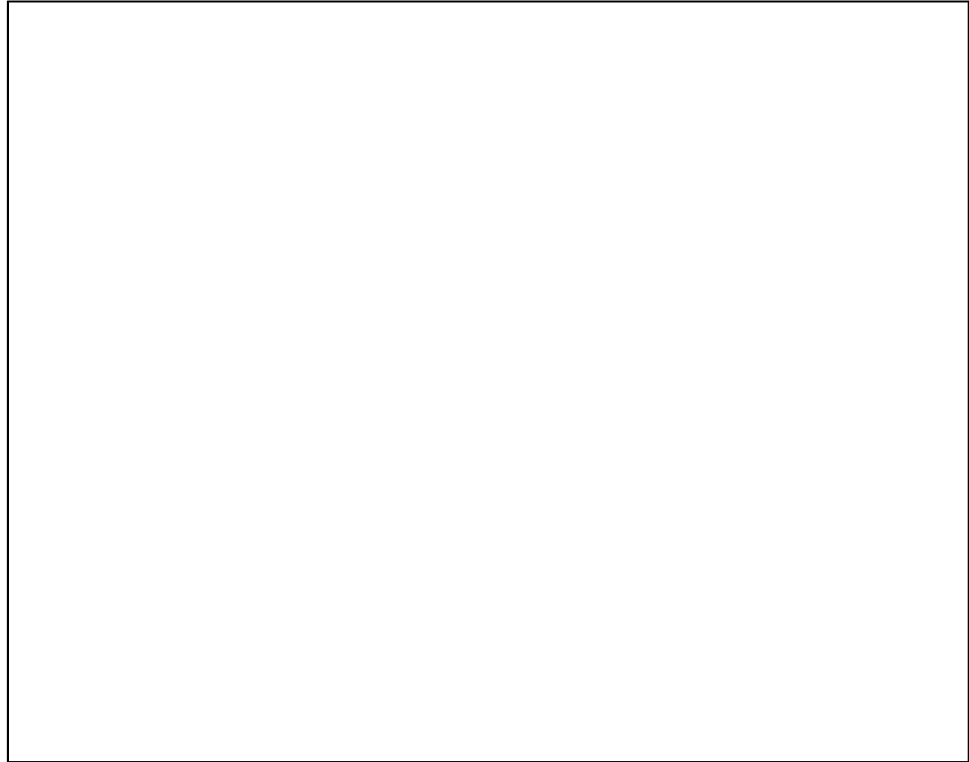


FIG. 4.5 – Variation de la conductance en fonction de la tension de grille dans les mêmes conditions que précédemment, mais avec un courant continu superposé au courant alternatif. Ce courant continu entraîne un “ lissage ” des plateaux de conductance.

### 4.3.2 Mesure de la réduction du bruit de grenaille

#### Cas d'une transmission $T = 1/2$

Nous allons d'abord nous intéresser à ce qui se passe dans le régime-tunnel, et à basse température. La figure 4.6 représente le bruit de grenaille en fonction du courant pour une transmission  $T = 1/2$ . Les unités sont d'une part le courant  $I$  et le bruit en tension  $S_V$ , d'autre part la température de bruit  $\theta^*$ , mesurée en utilisant la technique décrite au paragraphe 4.2.1, et la température appliquée  $\frac{eV_{DS}}{2k_B}$ .

La première droite représente le bruit de grenaille classique, c'est à dire  $2eI$ . Clairement, le bruit mesuré (triangles) est inférieur à cette valeur. La deuxième courbe est un calcul selon la formule 3.8. La comparaison des deux montre qu'il y a un facteur de réduction du bruit, qui vaut dans ce cas  $1/2$  : c'est ce à quoi on s'attend d'après la théorie. Cette mesure montre que notre système expérimental fonctionne, et donne la précision voulue. Il est donc possible d'étudier quantitativement la variation du bruit de grenaille en fonction de la transmission.

#### Variation du bruit de grenaille en fonction de la transmission

**Transmissions comprises entre 0 et 1** Nous allons d'abord nous intéresser à ce qui se passe dans le régime-tunnel [48], c'est à dire lorsqu'il n'y a qu'un seul mode évanescent dans la structure. Il s'agit donc de mettre en évidence la transition du bruit de grenaille classique vers la suppression quantique du bruit de grenaille avec la transmission [48, 60, 75, 76]. La figure 4.7 montre le bruit en unités de température de bruit en fonction de la tension drain-source, et ce pour différentes transmissions comprise entre 0.166 et 0.75. Le bruit de grenaille classique serait donné par la droite de pente 1, c'est à dire  $\theta^* = \theta$ . Lorsque la transmission augmente, la pente diminue, en accord avec le modèle théorique. Si on ajuste la partie linéaire des courbes, c'est à dire pour  $\frac{eV_{DS}}{2k_B} \succ \theta$  (cf. formule 3.8), on trouve des pentes de 0.25, 0.49, 0.74 et 0.86 respectivement, en très bon accord avec les valeurs de 0.25, 0.50, 0.75 et 0.834 attendues pour le facteur  $(1 - T)$ . Les courbes en pointillés ne sont pas des ajustements, mais représentent le calcul théorique, d'après la formule 3.8 ; on voit donc que nos mesures présentent un excellent accord *quantitatif* avec le modèle théorique<sup>7</sup>. Encore une fois, il faut rappeler qu'il n'y a dans ces courbes aucun paramètre ajustable : seule la température limite la précision de la mesure.

---

<sup>7</sup>Dans d'autres travaux [58], une oscillation du bruit en fonction de la tension de grille avait été trouvée, mais les auteurs n'avaient pas réussi à mettre en évidence la transition vers le bruit de grenaille classique.

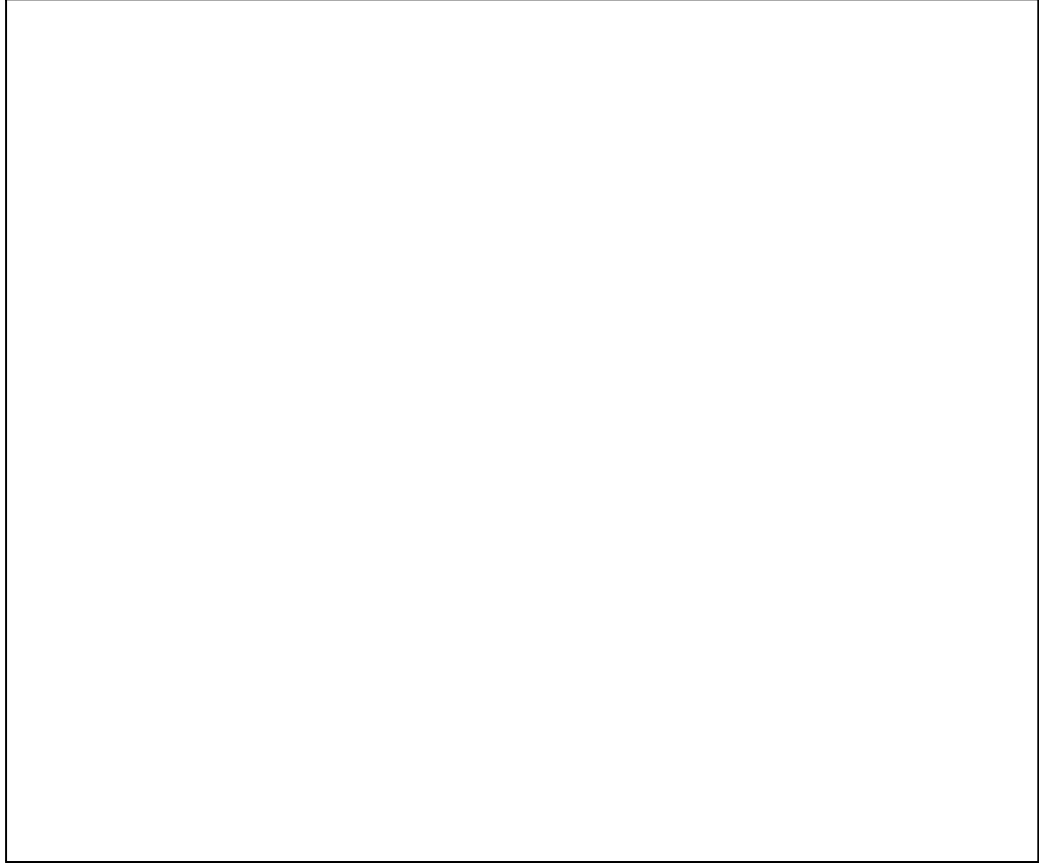


FIG. 4.6 – Bruit mesuré en unités de température de bruit en fonction de la tension appliquée, à  $38\text{mK}$ . La droite du haut représente le bruit de grenaille classique  $2eI$ , celle du bas un calcul d'après la formule 3.8. La précision de la mesure est de l'ordre de  $100pV/\sqrt{Hz}$ .

**Cas à plusieurs canaux** Nous allons maintenant nous intéresser à ce qui se passe lorsque plusieurs canaux sont transmis, c'est à dire à partir du premier plateau. Idéalement, le premier mode, qui est parfaitement transmis, devient silencieux, et le deuxième mode, qui est évanescent, est le seul à générer du bruit.

La figure 4.8 montre les mesures effectuées à des conductances entre 0.833 et 2 en unités du quantum de conductance. Il faut noter que la résistance du méso n'est plus négligeable devant celle du point-contact.

La figure 4.10 représente le facteur de réduction du bruit de grenaille en fonction de la transmission, c'est à dire le facteur  $\frac{\sum_n T_n(1-T_n)}{\sum_n T_n}$  de la relation 3.9. L'accord avec la valeur théorique est quasiment parfait jusqu'à des

transmissions de 0.833 ; ensuite, on observe une déviation à la valeur attendue. On a alors affaire à deux phénomènes différents : premièrement, il existe sans doute dans notre échantillon un mélange entre les modes, comme en témoigne l'allure des plateaux de conductance de la figure 4.4. En effet, si on suppose par exemple que le premier mode a une transmission de 0.9, et que le deuxième mode a une transmission de 0.1, on a bien une transmission totale unité, mais le facteur de réduction du bruit donné par la formule 3.9 n'est que de 0.08. Ensuite, le passage du courant provoque un chauffage des électrons. En effet, à très basse température, les électrons sont très mal couplés au réseau [34, 77, 78], sauf au niveau des contacts ohmiques qui sont fortement désordonnés.

On peut tenir compte quantitativement de ce chauffage ; pour cela, il faut résoudre un problème de transport schématisé sur la figure 4.9 : le Point-Contact injecte dans chacun des fils du méso une puissance  $\frac{1}{2}R_{QPC}I^2$ . Les fils du méso ont une conductance  $G_{Méso}$ . La condition aux limites est que la température des électrons est  $\theta_0$ , la température du réseau, au niveau des contacts ohmiques. L'équation qui régit le transport de chaleur est donc donnée par :

$$j_q(x) = -\kappa \frac{\partial T_e}{\partial x}(x) = \frac{1}{2}R_{QPC}I^2 + \rho_{Méso}I^2x$$

où  $\kappa$  est le coefficient de conductivité thermique. En utilisant la relation de Wiedemann-Frantz [32, 33, 60] :

$$\frac{\kappa}{\sigma\theta_e} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2$$

avec  $\sigma$  la conductivité du méso et  $\theta_0$  la température du réseau, et la condition aux limites  $\theta_e = \theta_0$  au niveau des contacts ohmiques, on obtient pour la température électronique :

$$\theta_e^2 = \theta_0^2 + \frac{24}{\pi^2} \frac{G_{QPC}}{G_{Méso}} \left( 1 + 2 \frac{G_{QPC}}{G_{Méso}} \right) \left( \frac{eV_{DS}}{2k_B} \right)^2 \quad (4.2)$$

On voit donc que pour  $\left( \frac{eV_{DS}}{2k_B} \right) \gg \theta_0$ , la température électronique varie linéairement avec la tension. Le bruit thermique va donc lui aussi croître linéairement avec la tension, reproduisant le comportement auquel on s'attendrait pour du bruit de grenaille ; il s'agit donc d'un *pseudo bruit de grenaille*, qui n'est en fait qu'une augmentation du bruit thermique provoquée par le chauffage des électrons. Il faut remarquer que cet effet est d'autant plus fort que le rapport  $G_{QPC}/G_{Méso}$  est grand ; en particulier, on y est d'autant plus sensible pour les mesures à forte transmission.

Enfin, l'action du champ magnétique est d'abaisser la résistance du méso, et donc de minimiser cet effet. Sur la figure 4.10, la courbe en pointillés représente la courbe théorique en tenant compte des effets de chauffage donnés par la formule 4.2, et en prenant pour la résistance du méso la valeur mesurée de  $25k\Omega$ . Les triangles ouverts représentent les points expérimentaux mesurés avec un champ magnétique faible. On voit donc que le chauffage des électrons explique bien l'excès de bruit observé pour des transmissions élevées (triangles pleins et courbe en pointillés), et qu'il est possible de s'affranchir de ce problème en appliquant un champ magnétique faible (triangles ouverts et courbe en trait plein).

### Transition entre le bruit thermique et le bruit de grenaille

Une autre prédiction importante de la théorie de la réduction quantique du bruit de grenaille (cf. § 3.2.2) est la continuité entre le bruit thermique et le bruit de grenaille en fonction de la tension de polarisation [52, 14]. On s'attend à trouver le bruit thermique jusqu'à une tension  $\frac{eV_{DS}}{2k_B} \simeq \theta$ , puis à voir une transition vers le régime de bruit de grenaille où le bruit varie linéairement en fonction du courant. Dans le cas où il n'y a qu'un seul canal, le bruit, en unités de température de bruit, devrait suivre une loi donnée par la formule 3.8.

Pour valider cette prédiction, nous avons effectué nos mesures dans le régime-tunnel, avec une transmission  $T = 1/2$ . Le bruit est mesuré en fonction de la tension appliquée, et ce à différentes températures  $\theta = 38mK$ ,  $80mK$  et  $180mK$ . La pente asymptotique de la courbe mesurée à  $38mK$  a une valeur de 0.49, en accord avec la valeur prédite de 0.5 pour le facteur  $(1 - T)$ . De plus, nous avons vérifié que le bruit est blanc (indépendant de la fréquence) : on trouve pour la pente 0.49 à  $6kHz$  (valeur citée plus haut), 0.50 à  $4kHz$ , et 0.52 à  $9kHz$ . Lorsque la température augmente, le bruit à tension nulle augmente : on retrouve le bruit thermique, ou bruit d'équilibre. Quantitativement, la valeur trouvée est en accord avec la théorie, c'est à dire que l'on a bien  $\theta^*|_{\frac{eV_{DS}}{2k_B\theta}=1} = \theta$ . De plus, quand on augmente la tension de polarisation, on voit une transition vers un bruit qui varie linéairement : on passe du bruit thermique au bruit de grenaille. Cette transition se produit quand la tension appliquée, exprimée en unités de température, est égale à la température de l'échantillon,  $\frac{eV_{DS}}{2k_B} = \theta$ . À cette tension, les fluctuations dans l'occupation des états du faisceau incident, dues à la température, génèrent autant de bruit que la partition des électrons entre faisceau réfléchi et faisceau transmis. Pour des tensions plus faibles, la température produit plus de bruit, et pour des tensions plus fortes, c'est la partition des électrons qui domine (cf. § 3.2.2). Les courbes en pointillés représentent les variations du

bruit attendues d'après la théorie, et calculées selon la formule 3.8.

Cette expérience nous a donc permis de vérifier que dans un conducteur quantique, le bruit thermique, ou bruit Johnson, a bien fondamentalement la même origine que le bruit de grenaille, et que l'on passe continuellement de l'un à l'autre en augmentant la tension de polarisation. Cette transition se produit quand la tension, exprimée en unité de température, est égale à la température de l'échantillon.

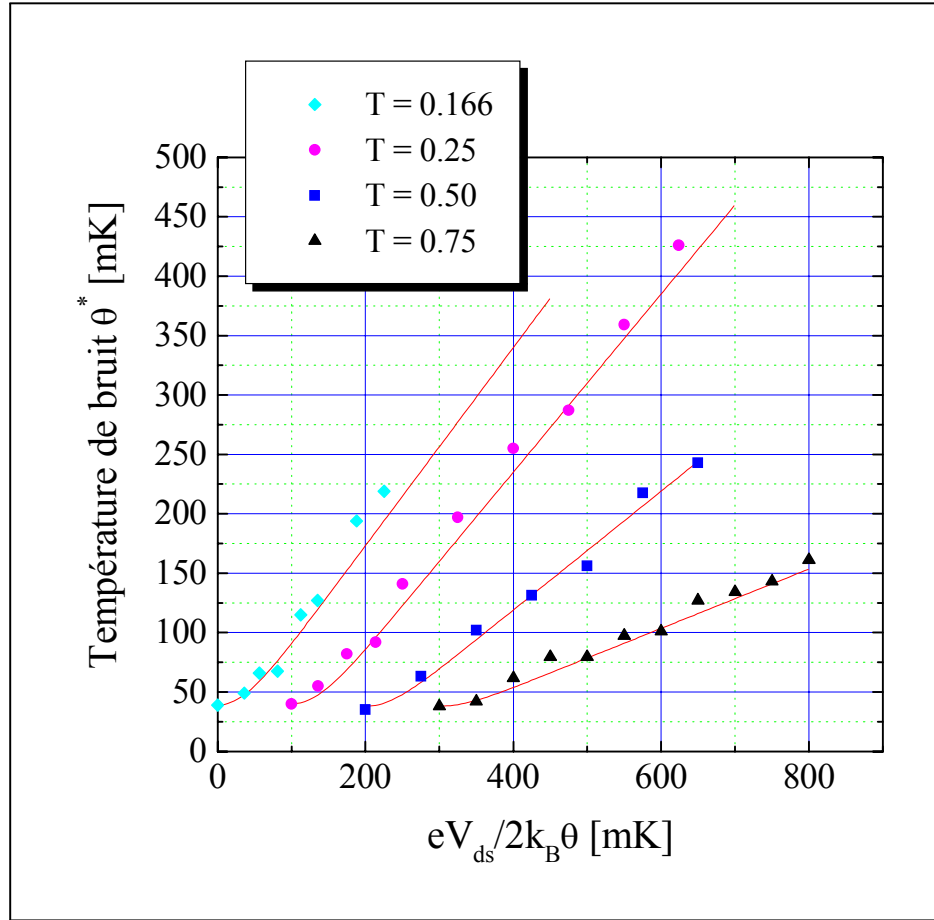


FIG. 4.7 – Bruit en fonction de la tension drain-source pour différentes transmissions comprises entre 0.166 et 0.75 ; la température est de  $38\text{mK}$ . Les grandeurs sont exprimées en unités de température équivalente, et les courbes sont décalées de  $100\text{mK}$  en abscisses pour plus de clarté. On observe bien la réduction du bruit lorsque la transmission augmente. Les courbes en traits pleins sont calculées d'après la formule 3.8.



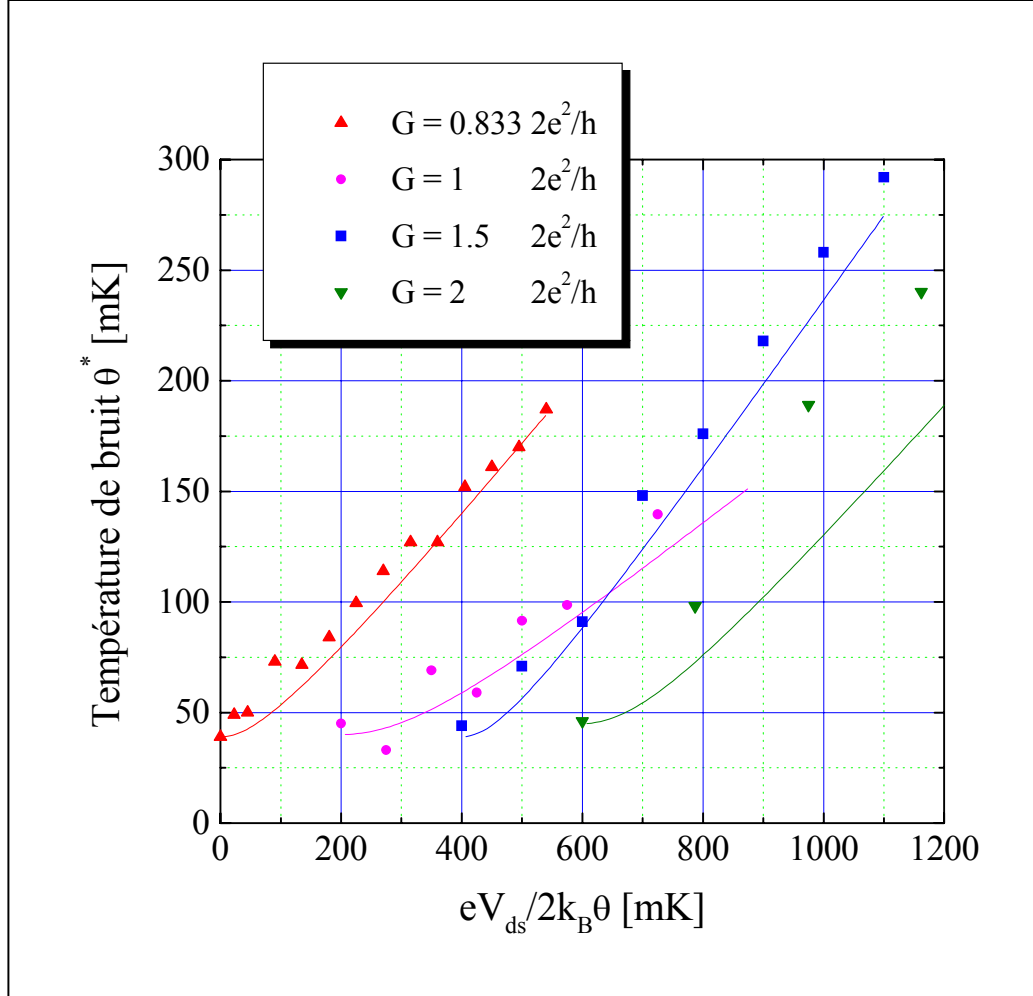


FIG. 4.8 – Bruit en fonction de la tension drain-source, en unités de température équivalente, à  $38\text{mK}$ . Les courbes en traits pleins représentent un calcul théorique incluant les effets de chauffage. L'accord est presque parfait ; les déviations résiduelles sont dues à un mélange des modes.

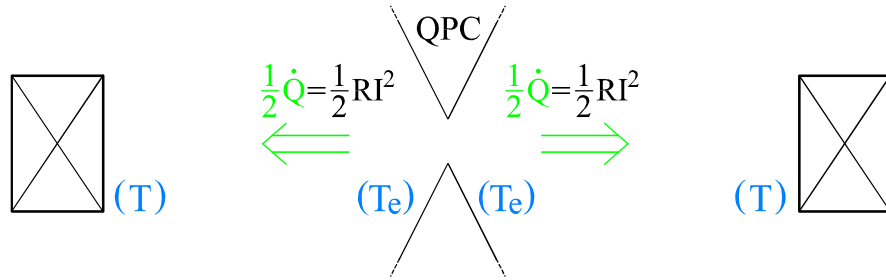


FIG. 4.9 – Modélisation du chauffage des électrons : le point-contact injecte une puissance  $1/2 R_{QPC} I^2$  dans chaque branche du méso, de résistance  $R_{Méso}$ . Le coefficient de conductivité thermique est relié à la conductivité électrique par la relation de Wiedemann-Frantz, et on prend comme condition aux limites que la température des électrons au niveau des contacts ohmiques est celle du réseau cristallin.

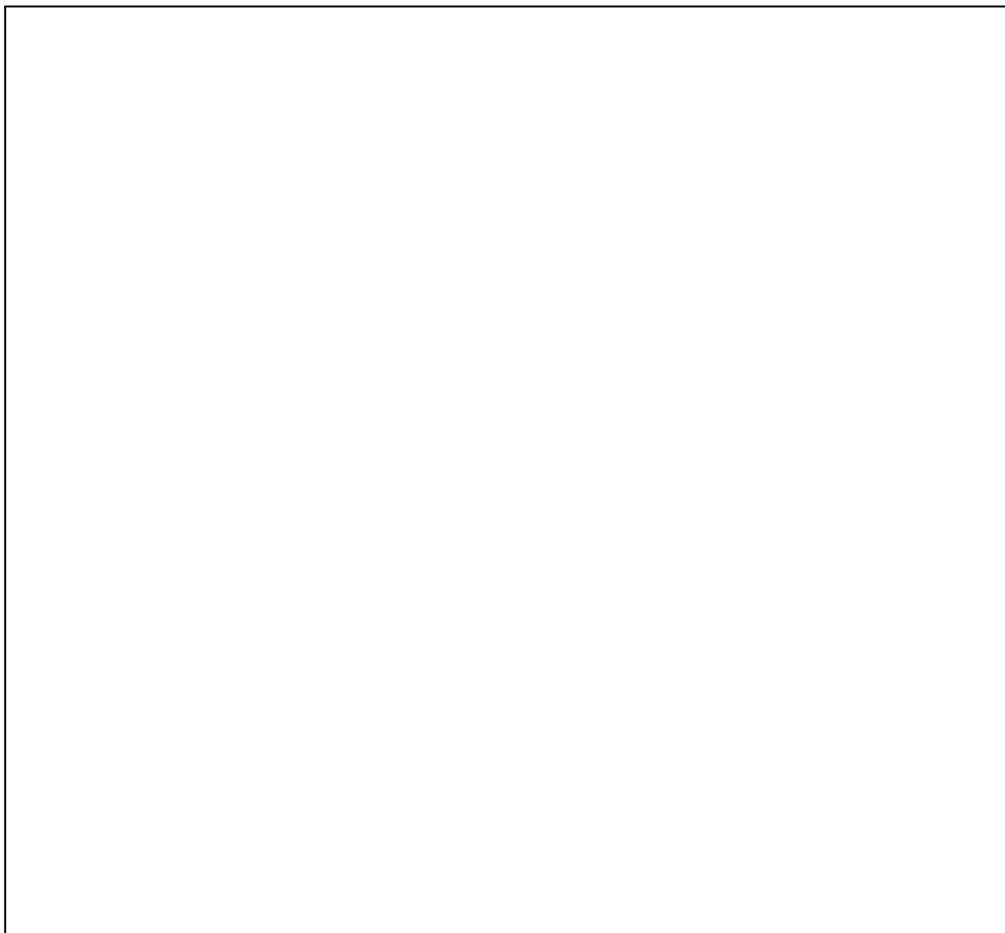


FIG. 4.10 – Facteur de réduction du Shot-Noise en fonction de la conductance, en unités du quantum de conductance. Les triangles représentent les mesures en champ nul, les cercles celles sous un champ magnétique de  $0.23T$ . Les courbes représentent le calcul théorique d'après la formule 3.9, celle en tirets incluant les effets de chauffage. L'effet du champ magnétique étant de réduire ces effets de chauffage, il faut comparer les mesures sous champ (cercles) avec la courbe en pointillés. Les petites déviations qui persistent sont dues au mélange des modes.



FIG. 4.11 – Shot-Noise en fonction de la tension de polarisation pour différentes températures et une transmission  $T = 1/2$ . On voit clairement la transition entre le bruit thermique pour  $\frac{eV_{DS}}{2k_B} \ll \theta$  et le Shot-Noise qui varie linéairement avec la tension appliquée, avec une pente asymptotique qui vaut  $(1 - T) = 1/2$ .

# Conclusion

L'expérience que nous avons réalisée nous a permis de vérifier expérimentalement une prédiction récente de la physique mésoscopique : la réduction quantique du bruit de grenaille due au principe de Pauli [12, 14, 13, 67]. Nos mesures montrent un accord quantitatif quasi-parfait avec les valeurs attendues [48, 60, 75, 76]. Ce type d'expériences, jusque là inédites dans ce domaine, apporte un éclairage nouveau sur les problèmes de transport à l'échelle mésoscopique. Nous montrons que la cohérence de phase des électrons a des conséquences non seulement sur la conductance [37, 36], mais aussi sur le bruit :

- Tout d'abord, le principe de Pauli corréle les électrons qui traversent le contact ponctuel quantique, rendant ainsi le flot de porteurs plus “ régulier ”. Il en résulte une diminution du bruit lorsque l'on augmente la transmission, voire sa suppression lorsque la transmission est parfaite.
- Le bruit thermique est fondamentalement de même nature que le bruit de grenaille : il provient de fluctuations dans l'occupation des états incidents sur le contact ponctuel quantique. Ces fluctuations sont en concurrence avec celles induites par la partition des électrons incidents entre faisceau réfléchi et faisceau transmis. Les fluctuations thermiques dominent jusqu'à ce que la tension devienne supérieur à la température ; ensuite, on retrouve le bruit de grenaille.

Cette expérience est la première du genre, et elle ouvre de nouvelles perspectives ; en effet, le contact ponctuel quantique est un système-modèle, dans la mesure où l'on peut contrôler précisément le nombre de canaux présents ainsi que leurs transmissions. Il est maintenant envisageable d'étendre ces expériences à d'autres systèmes plus complexes : systèmes diffusifs [13, 61, 67], jonctions conducteur normal-supraconducteur [65, 66, 68], anticorrélation du bruit dans une structure en  $Y$  ou en régime d'effet Hall entier [14, 13], effet Hall quantique fractionnaire [69, 70, 16]. D'un point de vue expérimental, notre système de mesure devrait permettre de faire toutes ces expériences. Cependant, les échantillons sont plus délicats à réaliser ; la plus grande partie du problème réside donc dans la croissance du matériau et la lithographie.



## Troisième partie

### Observation expérimentale des quasiparticules de charge fractionnaire de l'effet Hall quantique fractionnaire





# Introduction

L'effet Hall quantique a été découvert en 1980, sur des *MOSFET* en silicium, c'est à dire des gaz d'électrons bidimensionnels [79, 80]. Contrairement à ce qui est prévu par une théorie semi-classique du transport, la résistance Hall exhibe des plateaux en fonction du rapport de la densité de porteurs sur le champ magnétique, dont la valeur peut s'exprimer simplement à l'aide des constantes fondamentales de la physique :

$$R_{Hall} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$$

avec  $\nu$  entier. De plus, la résistance longitudinale s'annule sur ces plateaux.

Une des propriétés les plus remarquables de cet effet est que *la valeur de la résistance Hall ne dépend que des constantes fondamentales de la physique* ; en particulier, elle est indépendante de l'échantillon mesuré et de sa géométrie, ou des paramètres extérieurs (température, fréquence, etc.). De là, les applications en métrologie étaient évidentes, et l'effet Hall quantique est aujourd'hui utilisé comme standard de résistance. Cette découverte fut à l'origine d'un grand nombre de travaux, tant théoriques qu'expérimentaux.

Quelques années plus tard, une autre découverte relançait le sujet : en faisant des mesures sur des hétérostructures d'arséniure de gallium, semblables à celles que nous avons utilisées, il a été découvert que  $\nu$  pouvait prendre des valeurs fractionnaires,  $\nu = p/q$ , avec  $q$  impair [81]. Plus précisément, dans cette première expérience, seuls les plateaux à  $\nu = 1/3$  et  $\nu = 2/3$  avaient été observés, mais d'autres fractions ont été mises en évidence peu après [82, 83]. Il faut cependant noter que ces plateaux fractionnaires sont beaucoup moins "robustes" que les plateaux entiers : ils sont très vite détruits par le désordre.

L'effet Hall entier apparaît lorsque le potentiel de désordre est beaucoup plus fort que les interactions, tandis que l'effet Hall fractionnaire est la limite où les interactions dominent. Dans la suite de cette partie, nous nous intéresserons au régime fractionnaire. Le but de ce travail est d'étudier la charge des excitations dans ce système. Contrairement à ce qui se passe dans un

métal normal, qui forme un liquide de Fermi, les interactions en régime d'effet Hall quantique fractionnaire créent un état collectif fortement corrélé, qui n'est plus décrit par un liquide de Fermi. Dans ce cas, les excitations élémentaires, ou quasiparticules, ont une charge qui diffère de celle de l'électron. Un exemple bien connu est celui des paires de Cooper dans un supraconducteur, dont la charge est  $2e$ . De façon encore plus remarquable, la charge est ici fractionnaire,  $1/3e$  dans les cas de l'état fractionnaire  $1/3$ , qui est le mieux défini, et auquel nous allons nous intéresser.

Après un bref rappel sur le transport classique en présence de champ magnétique, et sur l'effet Hall quantique entier, nous décrirons les propriétés les plus remarquables de l'effet Hall quantique fractionnaire. En particulier, nous détaillerons la fonction d'onde et les quasiparticules de Laughlin. Puis nous décrirons une expérience qui, pour la première fois, a permis d'observer ces charges fractionnaires. L'effet Hall fractionnaire est un vaste sujet, en pleine évolution, et qui peut être abordé de différentes façons [84]. Bien d'autres propriétés remarquables mériteraient d'être étudiées ; dans le cadre de ce travail, nous nous contenterons cependant de détailler les concepts qui mènent à l'existence de ces quasiparticules de charge fractionnaire, et à leur mise en évidence expérimentale.

# Chapitre 5

## Effet Hall classique

### 5.1 Dynamique des électrons en champ magnétique

Dans un premier temps, il est intéressant d'étudier le comportement d'électrons classiques. On considère donc un plan d'électrons soumis à un champ magnétique perpendiculaire  $\vec{B}$ . En adoptant la notation complexe  $z = x + iy$  pour représenter la position d'un électron, les équations du mouvement sont :

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = -eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = eB\dot{x} \end{array} \right\} \ddot{z} = i\omega_c \dot{z}$$

On trouve alors simplement :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v_0 e^{i\omega_c t} \\ z &= C - \frac{iv_0}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \end{aligned}$$

La particule décrit donc une orbite cyclotron avec une fréquence  $\omega_c = eB/m$ . Le rayon de cette orbite est relié à la vitesse de la particule par la relation  $R_c = v_c/\omega_c$ . Le centre de l'orbite est lui immobile.

### 5.2 Transport

Dans ce régime d'effet Hall classique, et pour des longueurs plus grandes que la longueur de collision élastique, on peut calculer un tenseur de conductivité  $\hat{\Sigma}$  :

$$\hat{\Sigma} = \frac{\Sigma}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\Sigma$  est la conductivité en champ nul,  $\Sigma = n_s e^2 \tau / m^*$ , avec  $\tau$  le temps de collision [32, 33]. Le tenseur de résistivité s'en déduit simplement :

$$\hat{\rho} = (\hat{\Sigma})^{-1} = \rho \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\rho$  est la résistivité en champ nul. La résistivité longitudinale est donnée par les éléments diagonaux du tenseur, et la résistance Hall (ou résistance transverse) par les éléments non-diagonaux. On voit qu'en régime classique, la résistance longitudinale n'est pas affectée par le champ magnétique (il n'y a pas de magnéto-résistance) ; quant à la résistance Hall, elle est donnée par :

$$\rho_{xy} = \rho \omega_c \tau = \frac{1}{n_s e} B$$

La résistance Hall classique varie linéairement avec le champ magnétique, et donne une mesure de la densité électronique. Elle est utilisée pour caractériser la densité et le signe des porteurs dans de nombreux matériaux conducteurs, en particulier les semiconducteurs.

Lorsqu'on mesure un échantillon en champ magnétique, cette description classique de l'effet Hall est pertinente tant que  $\omega_c \tau \ll 1$ . On rentre ensuite dans le régime d'effet Hall quantique. La transition se produit lorsque l'électron garde sa cohérence de phase sur toute la longueur de son orbite cyclotron :

$$\frac{m^* v_F}{e B} = l_\phi$$

où  $m^*$  est la masse effective de l'électron et  $l_\phi$  la longueur de cohérence de phase. À partir de ce champ, il faut décrire l'effet Hall en termes quantiques<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Une description quantique est nécessaire même en champ faible pour décrire la résistance longitudinale, par exemple les effets de localisation faible.

# Chapitre 6

## Effet Hall quantique entier

### 6.1 Niveaux de Landau

#### 6.1.1 Électrons sans spin

Pour décrire l'effet Hall quantique, on part de l'Hamiltonien :

$$H_0 = \frac{1}{2m^*} \left( \vec{p} - e \vec{A} \right)^2 = \frac{\Pi^2}{2m^*}$$

avec  $m^*$  la masse effective de l'électron,  $e = -|e|$  sa charge,  $\vec{p}$  son impulsion et  $\vec{A}$  le potentiel-vecteur du champ magnétique.

Dans la jauge cylindrique  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$ , où  $\vec{B}$  est le champ magnétique et  $\vec{r}$  la position dans le plan complexe, l'Hamiltonien est quadratique en position et en impulsion.  $H_0$  est donc analogue à un Hamiltonien d'oscillateur harmonique à deux dimensions. De plus, les composantes  $\Pi_x$  et  $\Pi_y$  sont conjuguées :

$$[\Pi_x, \Pi_y] = \frac{-i\hbar^2}{\ell_m^2}$$

avec  $\ell_m = \sqrt{\hbar/eB}$  la longueur magnétique.

On définit les opérateurs  $a$  et  $a^+$  par :

$$\begin{cases} a^+ = \frac{\ell_m}{\hbar\sqrt{2}} (\Pi_x + i\Pi_y) \\ [a, a^+] = 1 \end{cases}$$

L'Hamiltonien  $H_0$  s'écrit alors :

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_c (aa^+ + a^+a)$$

On reconnaît un Hamiltonien d'oscillateur harmonique, dont les énergies propres sont :

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_c (n + 1/2)$$

Les niveaux d'énergie quantifiés sont appelés “ niveaux de Landau ”. Cette énergie ne dépend pas de la position du centre de l'orbite cyclotron (le paramètre  $C$  dans le paragraphe 5.1) ; on peut alors s'attendre à ce que ces niveaux soient dégénérés. L'opérateur quantique qui correspond à la position du centre de l'orbite cyclotron s'écrit :

$$\begin{cases} C = z + i\frac{\Pi}{m^*\omega_c} \\ [C_x, C_y] = i\ell_m^2 \end{cases}$$

avec  $z = x + iy$  la position dans le plan et  $\ell_m = \sqrt{\hbar/eB}$  la longueur magnétique.  $\ell_m^2$  représente l'aire d'un quantum de flux  $\phi_0 = h/e$ .

De la même façon que précédemment, on définit les opérateurs  $b$  et  $b^+$  par :

$$\begin{cases} b = \frac{1}{\ell_m\sqrt{2}} (C_x + iC_y) \\ [b, b^+] = 1 \end{cases}$$

On peut vérifier aisément que  $[a, b] = [a^+, b] = [H, b] = 0$ , et on peut diagonaliser l'Hamiltonien dans la base des fonctions propres des opérateurs  $a$  et  $b$ . La base des états propres de  $H_0$  peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} |n, m\rangle = \frac{(a^+)^n (b^+)^m}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle \\ \varepsilon_n = \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs propres ayant la même énergie  $\varepsilon_n$  est appelé *état de Landau*. En réexprimant  $a$  et  $b$  en fonction de  $z$ ,  $\bar{z}$ ,  $\partial/\partial z$  et  $\partial/\partial \bar{z}$ , on peut montrer [84] que :

$$\begin{aligned} \Psi_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell_m^2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4\ell_m^2}} \\ \Psi_{0,m} &= \frac{z^m}{\sqrt{2\pi\ell_m^2} \sqrt{2^m m!}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4\ell_m^2}} \end{aligned}$$

On peut maintenant exprimer le nombre d'états par unité de surface à l'intérieur d'un niveau de Landau, par exemple le premier ( $n = 0$ ). Pour cela, il faut calculer l'aire occupée lorsque tous les états à une particule sont occupés dans le premier niveau de Landau<sup>1</sup>, c'est à dire :

$$\pi \langle m, 0 | z\bar{z} | 0, m \rangle = 2\pi\ell_m^2 (0 + m + 1)$$

---

<sup>1</sup>On utilise les relations :  $\begin{cases} z = \ell_m\sqrt{2} (b + a^+) \\ \bar{z} = \ell_m\sqrt{2} (b^+ + a) \end{cases}$

On voit que *l'aire occupée par un état est exactement l'aire d'un quantum de flux  $h/eB$* . On définit alors le facteur remplissage  $\nu$  par le rapport de la densité électronique sur la densité de quanta de flux :

$$\nu = \frac{n_s}{n_{\phi_0}}$$

Chaque état occupe un quantum de flux, et l'orbite cyclotron d'un électron a l'aire d'un quantum de flux. Lorsqu'on a mis un électron par quantum de flux, on a donc complètement rempli un niveau de Landau. Pour ajouter l'électron suivant, il faut payer l'énergie  $\hbar\omega_c$  : le potentiel chimique varie de façon discontinue en fonction de la densité électronique. La discontinuité du potentiel chimique<sup>2</sup> permet d'établir l'incompressibilité du liquide Hall quantique, et la quantification de la résistance Hall [84].

### 6.1.2 Prise en compte du spin

Le spin apparaît *via* l'énergie Zeeman, que l'on rajoute simplement aux énergies propres de  $H_0$  :

$$\varepsilon_{n,\pm} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} g^* \mu_B B$$

où  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr, et  $g^*$  le facteur gyromagnétique de Landé. Ce dernier dépend à la fois du facteur gyromagnétique des électrons dans la bande de conduction ( $g = -0.44$  dans du GaAs massif), et de la différence d'occupation des états de “ spin up ” et de “ spin down ”  $n_\uparrow$  et  $n_\downarrow$ ,  $g^* = g + \alpha(n_\uparrow - n_\downarrow)$ .  $\alpha \sim e^2/(\varepsilon\ell_m)$  dépend lui-même des interactions coulombiennes entre les électrons et du champ magnétique<sup>3</sup> [85].  $g^*$  est donc une fonction auto-cohérente de la densité électronique. Finalement, le facteur de Landé peut être modifié par le désordre, qui mélange les états de “ spin up ” et de “ spin down ” [86].

On voit apparaître les plateaux impairs de l'effet Hall quantique lorsque  $g^* \mu_B B$  n'est plus négligeable comparé à la température. Typiquement, dans nos échantillons, on voit apparaître les plateaux impairs à partir du facteur de remplissage  $\nu = 7$ .

---

<sup>2</sup>Il s'agit d'une discontinuité en fonction de la densité électronique, ou, de façon équivalente, en fonction du champ magnétique.

<sup>3</sup>Ces deux phénomènes sont en fait reliés : le champ magnétique confine les électrons sur des orbites cyclotron de plus en plus petites, ce qui amène, par exemple, à la formation du cristal de Wigner.

## 6.2 Résistance Hall et effet Shubnikov-de Haas

Si on reprend l'image semi-classique du transport (cf. chapitre 5), la résistance longitudinale  $\rho_{xx}$  dépend de l'inverse du temps de collision :  $\rho_{xx} \propto 1/\tau$ . Lorsque le niveau de Fermi se trouve entre deux niveaux de Landau, il y a un gap pour les excitations, et la densité d'états pour les électrons  $g(E_F)$  s'annule. On s'attend donc à ce que  $\tau$  diverge entre deux niveaux de Landau. Ceci entraîne des oscillations dans la résistance longitudinale, connues sous le nom d'oscillations Shubnikov-de Haas.

De même, la densité d'états, vaut  $n_s = \nu n_{\phi_0}$  lorsque tous les états à une particule d'un niveau de Landau sont remplis. Toujours dans une approche semi-classique, la résistance Hall  $\rho_{xy}$  devient :

$$\rho_{xy} = \frac{B}{n_s e} = \nu^{-1} \frac{B}{n_{\phi_0} e} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$$

Tant que le niveau de Fermi se trouve entre deux niveaux de Landau,  $\nu$  est entier. On trouve alors que la résistance Hall ne dépend que de  $h$  et  $e$ .

Une théorie plus évoluée est nécessaire pour comprendre la largeur des plateaux Hall ainsi que la forme exacte des oscillations de Shubnikov-de Haas. Ces deux points, fondamentaux, ne sont pas nécessaires à la compréhension de nos expériences sur le bruit de grenaille ; aussi nous ne détaillerons pas ici les modèles qui s'y rapportent. Disons simplement que l'on peut relier la quantification de la résistance Hall à l'incompressibilité du liquide Hall quantique, et à l'existence d'états localisés dans le bulk [84, 87, 88, 89, 90]. La figure 6.1 représente les plateaux entiers de l'effet Hall quantique pour un de nos échantillons.

## 6.3 États de bord

La brève description de l'effet Hall quantique donnée dans le chapitre précédent s'applique bien aux échantillons macroscopiques utilisés pour les premières expériences sur l'effet Hall quantique [79]. Il est même tout à fait remarquable que l'on voit dans des échantillons de l'ordre du millimètre un effet aussi fondamentalement relié à la nature quantique microscopique des électrons. En ce sens, l'effet Hall quantique peut être rapproché de la supraconductivité, qui est une autre manifestation macroscopique de la mécanique quantique.



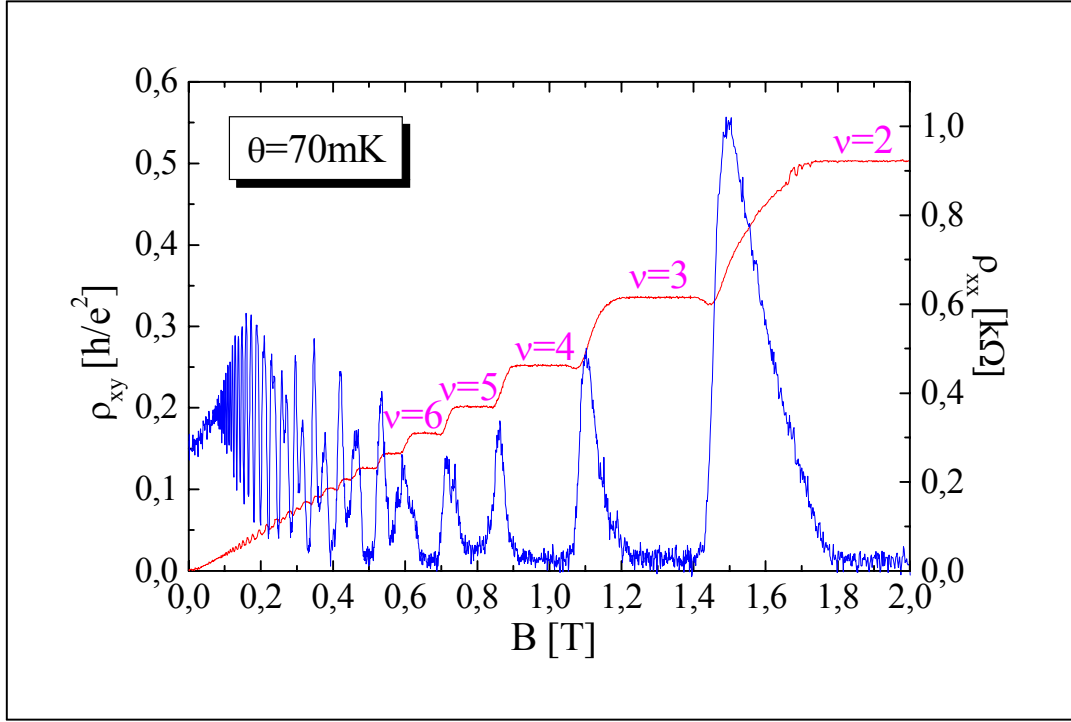


FIG. 6.1 – Résistance Hall et longitudinale d’un de nos échantillons en fonction du champ magnétique, à  $70\text{mK}$ . On voit les plateaux Hall entiers, pairs et impairs, et les oscillations Shubnikov-de Haas. La résistance longitudinale est quasiment nulle sur les plateaux Hall.

Dans nos échantillons mésoscopiques, qui font quelques micromètres de largeur, il est nécessaire de tenir compte de l’influence des bords. Ceux-ci confinent les électrons par un champ électrique [39] perpendiculaire au champ magnétique. Dans le chapitre 5, nous avons vu que dans le bulk (loin des bords), le centre de l’orbite cyclotron des électrons était immobile. Si maintenant on ajoute un champ électrique, la force de Lorentz va faire dériver ces orbites cyclotron. On peut donc décomposer le mouvement des électrons en un mouvement rapide de rotation à la pulsation  $\omega_c$ , et un mouvement lent de dérive du centre de l’orbite le long des bords.

### 6.3.1 Potentiel extérieur

En incluant un potentiel de confinement, on obtient l’Hamiltonien total :

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_c (aa^\dagger + a^\dagger a) + V(z)$$

Si on suppose que ce potentiel couple peu les différents niveaux de Landau, car il ne varie pas sur la taille d'une orbite cyclotron, on peut considérer qu'un électron est soumis au potentiel pris au centre de son orbite. L'Hamiltonien projeté sur un état de Landau devient :

$$\begin{aligned} H_n &= \langle n | H | n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \tilde{V}(C_x, C_y) \end{aligned}$$

On a donc bien décomposé l'Hamiltonien en un Hamiltonien qui représente le mouvement rapide de rotation et un Hamiltonien qui représente le potentiel agissant sur le centre de l'orbite cyclotron (variables  $C_x$  et  $C_y$ ).

### 6.3.2 États de bord

Pour un métal parfait à deux dimensions, dont la densité s'annule sur les bords, le potentiel de confinement varie comme  $y^{\frac{3}{2}}$  [39]. Cependant, nous considérerons ici le cas d'un confinement harmonique, qui, en plus d'être soluble, représente une bonne approximation et nous permettra de mettre en évidence les états de bord.

On considère un potentiel de confinement :

$$V(C_x, C_y) = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 (y_0 - W_0)^2$$

avec  $W_0$  le centre de la parabole<sup>4</sup>.

En utilisant la relation  $y_0 = i \frac{\hbar}{eB} \frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{\hbar}{eB} k_0$  ( $x_0$  et  $y_0$  sont des variables conjuguées), l'Hamiltonien devient :

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m^* (\omega_c/\omega_0)^2} \left( k_0 - \frac{W_0}{\ell_m^2} \right)^2$$

Le premier terme décrit le mouvement rapide de l'électron sur son orbite cyclotron, le second le mouvement lent de dérive du centre de cette orbite dans la direction  $x$  perpendiculaire au champ magnétique et au champ électrique de confinement. Les énergies propres deviennent [39] :

$$\varepsilon_n(k_0) = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m^* (\omega_c/\omega_0)^2} \left( k_0 - \frac{W_0}{\ell_m^2} \right)^2$$

---

<sup>4</sup>On peut par exemple considérer que le potentiel de confinement est nul au centre de l'échantillon, et qu'il ne varie que sur les bords (potentiel en forme de "baignoire").

À l'intérieur d'un niveau de Landau ( $n$  fixé), on voit que la relation de dispersion présente de fortes analogies avec celle d'un système unidimensionnel. Cette analogie peut être poussée plus loin, et relie l'effet Hall quantique fractionnaire aux liquides de Luttinger [70, 91, 92, 93, 94, 95, 96]; certains travaux expérimentaux tendent à valider cette approche [97, 98].

La vitesse de groupe des électrons devient :

$$v_g(k_0) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE(n, k_0)}{dk_0} = \frac{\hbar}{m^* (\omega_c/\omega_0)^2} \left( k_0 - \frac{W_0}{\ell_m^2} \right)$$

Dans le cas où il n'y avait pas de potentiel de confinement, la vitesse de groupe était nulle, et aucun courant ne circulait. Ici, les électrons acquièrent une vitesse de groupe non nulle, mais avec une masse effective modifiée dans le rapport de la pulsation cyclotron à la force du potentiel de confinement,  $m^* (\omega_c/\omega_0)^2$ ; un courant circule donc sur les bords de l'échantillon.

On définit un canal de bord comme l'état de bord dont l'énergie est égale à l'énergie de Fermi. Il y a donc autant de canaux de bord que de niveaux de Landau occupés dans le bulk (figure 6.2).

### 6.3.3 Bandes compressibles et incompressibles

Nous avons vu que dans le bulk, la densité électronique était quantifiée : il y a exactement un électron par quantum de flux, le liquide est incompressible ; il y a un gap  $\hbar\omega_c$  pour faire varier la densité. Dans un tel système, les électrons ne peuvent pas se réorganiser en réponse à un champ électrique, et l'écrantage est nul.

Lorsqu'on s'approche des bords, le champ électrique dû au potentiel de confinement courbe les niveaux de Landau. Lorsqu'un niveau de Landau croise le niveau de Fermi, il n'y a plus de gap à cet endroit-là ; la densité électronique peut varier, et l'écrantage devient parfait. On passe donc d'un écrantage nul dans le bulk, à un écrantage parfait au niveau des états de bords<sup>5</sup>.

Un modèle de Thomas-Fermi décrit de manière qualitative cet effet. Pour  $\nu$  entier, au milieu de l'échantillon, la densité est quantifiée. Près des bords, le champ électrique de confinement fait augmenter l'énergie des électrons, et courbe les niveaux de Landau. Lorsque ceux-ci croisent le niveau de Fermi, les électrons peuvent se réarranger et l'écrantage devient parfait ; la densité électronique se met donc à varier pour compenser le champ électrique, et le niveau de Landau se dépeuple. Cette région est appelée *bande*

---

<sup>5</sup>La longueur d'écrantage,  $\lambda_s$ , est définie par :  $\lambda_s = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon}{e^2} \frac{\partial\mu}{\partial n_s}$ . Lorsqu'il y a un gap, cette longueur diverge ; lorsqu'il n'y en a pas, elle est nulle.

*compressible* (figure 6.3). Dans cette région métallique, le champ électrique est parfaitement écranté : le potentiel chimique reste constant, et la vitesse de dérive des électrons est nulle. Les bandes compressibles ne transportent donc pas de courant. Le canal de bord est en fait constitué par la zone incompressible, dans laquelle existe un champ électrique, et qui transporte le courant. Un modèle électrostatique permet de calculer les largeurs des bandes compressibles et incompressibles [39, 99, 100, 101] ; en particulier, on peut montrer, dans une approximation de type Thomas-Fermi, que les bandes compressibles sont beaucoup plus larges que les bandes incompressibles.

## 6.4 Modèle de Büttiker

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'en régime d'effet Hall quantique, le courant était transporté par les canaux de bord, c'est à dire les bandes incompressibles dans lesquelles il existe un champ électrique qui fait dériver le centre des orbites cyclotron des électrons, et crée un courant permanent. Les canaux de bord ont donc un rôle crucial dans le transport en régime d'effet Hall quantique.

### 6.4.1 Formule de Landauer-Büttiker

Le caractère quasi-unidimensionnel des canaux de bord permet d'étendre l'approche de Landauer à l'effet Hall quantique ; on obtient alors la formule de Landauer-Büttiker [102]. Le rôle des contacts, en tant que réservoirs, est le même qu'en champ nul : ils émettent des électrons dans des canaux de bord dont le potentiel chimique est celui des contacts.

Lorsque le potentiel de confinement est suffisamment doux, le transport se fait de manière adiabatique. En effet, la séparation entre états de bord est très supérieure à la longueur magnétique  $\ell_m$  [39], et le recouvrement des fonctions d'onde est quasi-nul ; l'échange de particules d'un canal à l'autre est impossible. Les potentiels chimiques des deux canaux ne peuvent donc pas s'équilibrer, et le transport se fait de manière adiabatique entre les réservoirs<sup>6</sup>. Dans des échantillons de très haute mobilité, on peut ainsi avoir du transport adiabatique sur des distances atteignant la centaine de micromètres [103, 104].

On peut appliquer les résultats du transport quantique (cf. § 2.3.3). Les contacts ohmiques jouent le rôle des réservoirs : ils émettent des électrons

---

<sup>6</sup>En régime d'effet Hall quantique, le rôle des réservoirs est joué par les contacts ohmiques.

dans des canaux de bord tous au même potentiel chimique, et absorbent sans réflexion les électrons qu'ils reçoivent.

Le modèle proposé par Büttiker est extrêmement utile pour décrire le transport en régime d'effet Hall quantique dans des échantillons mésoscopiques.

Le rôle des sous-bandes dans l'approche de Landauer est ici joué par les canaux de bord, qui transportent chacun un quantum de conductance  $e^2/h$ . Par contre, ici, on n'a pas seulement deux réservoirs, mais un conducteur multi-contacts.

Un contact  $i$  au potentiel  $\delta\mu_i$  au-dessus du niveau de Fermi injecte dans l'échantillon un courant  $N_i (e/h) \delta\mu_i$ , avec  $N_i$  le nombre de canaux de bord sortant de ce contact. Certains de ces canaux vont être réfléchis vers ce même contact, avec une probabilité  $T_{ii}$ . Les autres contacts présents dans l'échantillon, envoient dans le contact  $i$  un courant  $\sum_{j \neq i} T_{ji} \delta\mu_j$ , où  $\delta\mu_j$  est le potentiel chimique du contact  $j$ , et  $T_{ji}$  la transmission du contact  $j$  vers le contact  $i$ . Les coefficients  $T_{\alpha\beta}$  peuvent être non entiers, dans le cas, par exemple, de la réflexion par un contact ponctuel quantique.

Finalement, le courant injecté dans l'échantillon par le contact  $i$  vaut :

$$I_i = \frac{e}{h} \left[ N_i \delta\mu_i - \sum_j T_{ji} \delta\mu_j \right]$$

L'ensemble de ces équations (une par contact) constitue les relations de Landauer-Büttiker. Les tensions sont obtenues simplement par la relation  $\delta V = \delta\mu/e$ .

### 6.4.2 Exemple

Comme application de la formule de Landauer-Büttiker, nous allons nous intéresser au cas d'une barre Hall (figure 6.4), avec un nombre entier  $\nu$  de niveaux de Landau remplis.

On injecte le courant par le contact 1, et il retourne à la masse par le contact 4. On note  $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$  la résistance obtenue en mesurant la tension entre les contacts  $\gamma$  et  $\delta$ , quand le courant est injecté en  $\alpha$  et retourne en  $\beta$ . En appliquant les relations de Landauer-Büttiker, on obtient :

$$\begin{aligned} - R_{xx} &= R_{14,23} = R_{14,65} = \left( \frac{1}{\nu_g} - \frac{1}{\nu} \right) \frac{h}{e^2} \\ - R_{xy} &= R_{14,26} = R_{14,35} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} \\ - R_{diagonale} &= R_{14,25} = R_{14,36} = \left( \frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu_g} \right) \frac{h}{e^2} \end{aligned}$$

$$- R_{14,14} = \frac{1}{\nu_g} \frac{h}{e^2}$$

On retrouve bien que lorsqu'un nombre entier de niveaux de Landau est présent dans l'échantillon, la résistance longitudinale s'annule et la résistance transverse se quantifie en unités du quantum de résistance  $h/e^2$ .

Il est intéressant de remarquer que la résistance deux points ( $R_{14,14}$ ) est quantifiée, tandis que la résistance quatre points ( $R_{14,26}$  ou  $R_{14,36}$ ) est nulle. Cela indique que le transport se fait de façon adiabatique entre deux réservoirs (il n'y a pas de rétrodiffusion). Par contre, il y a toujours une résistance de contact : c'est la résistance Hall, que l'on retrouve dans la résistance deux points. Il s'agit là d'une façon expérimentale de mettre en évidence la différence entre résistance deux points et résistance quatre points discutée dans le cadre de la formule de Landauer (cf. § 2.3.3). La différence réside dans le fait qu'en régime d'effet Hall quantique, le champ magnétique rend le transport cohérent sur de beaucoup plus grandes distances.

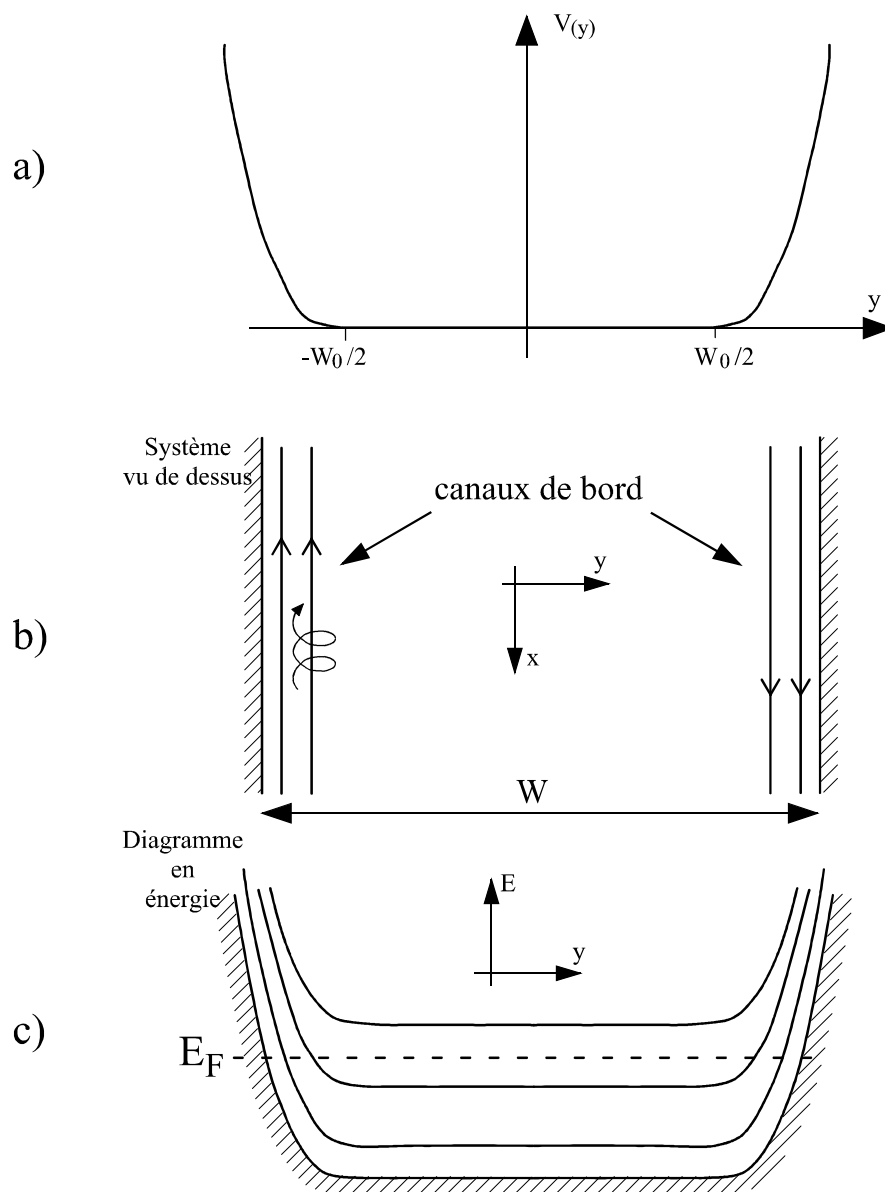


FIG. 6.2 – Formation des canaux de bord : le potentiel de confinement (a) courbe les niveaux de Landau (c). L'intersection de ces niveaux de Landau avec le niveau de Fermi donne les canaux de bord. Ceux-ci se propagent de chaque côté de l'échantillon (b), en sens inverse.

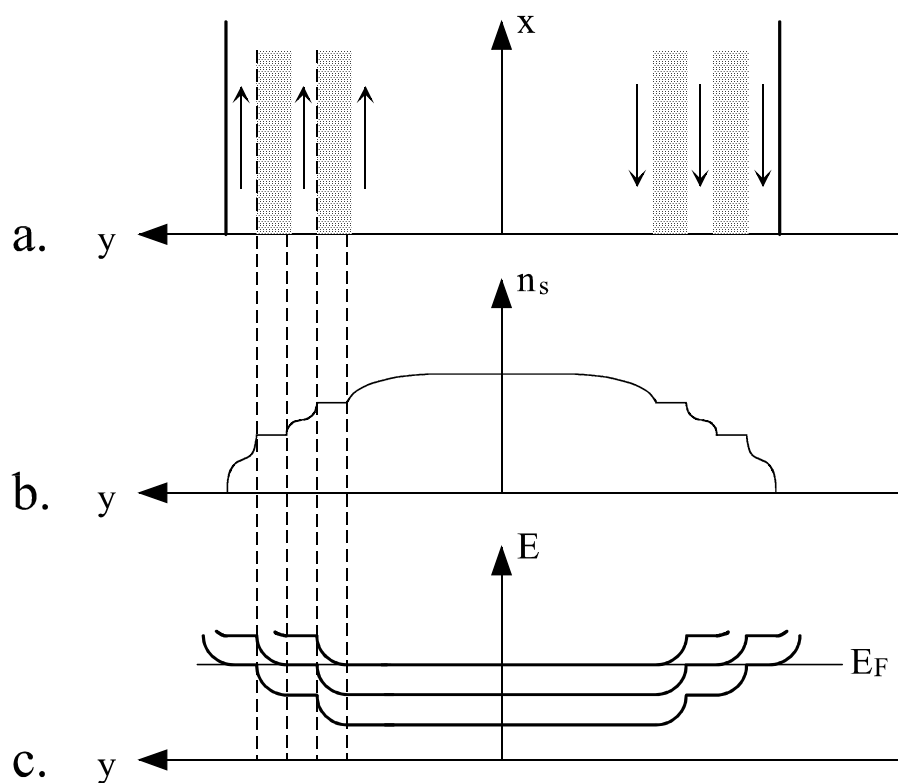


FIG. 6.3 – Formation des bandes compressibles et incompressibles. En (c), on a représenté l'énergie. Lorsqu'un niveau de Landau croise le niveau de Fermi, il n'y a plus de gap et la densité électronique peut varier (b). On a alors une bande compressible (a), jusqu'à ce que ce niveau de Landau soit complètement vidé.



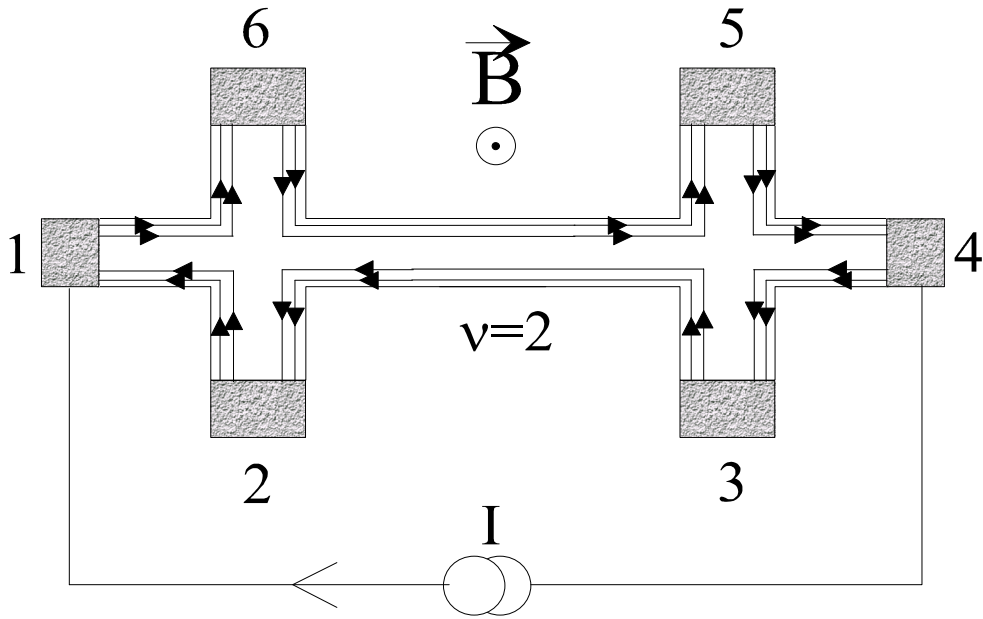


FIG. 6.4 – Exemple d’application de la formule de Büttiker : on considère une barre Hall conventionnelle, placée en régime d’effet Hall quantique entier, avec  $\nu = 2$  dans les “ fils ” (le méso) et  $\nu_g = 1$  au niveau du point-contact. Le courant circule entre les contacts 1 et 4. La résistance longitudinale est mesurée entre les contacts 5 et 6 ou 2 et 3, et la résistance Hall entre les contacts 3 et 5 ou 2 et 6. La résistance diagonale (mesurée entre les contacts 2 et 5 ou 3 et 6) est la somme de la résistance Hall et de la résistance longitudinale. Quant à la résistance deux points (mesurée entre les contacts 1 et 4), elle est déterminée uniquement par le facteur de remplissage au niveau du point-contact.



# Chapitre 7

## Effet Hall quantique fractionnaire

### 7.1 Introduction

L'effet Hall quantique fractionnaire est un domaine particulièrement fécond de la physique. S'il a généré de nombreux travaux théoriques et expérimentaux, toutes les questions sont loin d'être résolues [84]. Dans le cadre de cette thèse, nous nous limiterons à l'étude des excitations élémentaires en régime d'effet Hall quantique fractionnaire. En particulier, nous montrerons que leur charge fractionnaire est une réalité expérimentalement observable.

Cependant, il est important de citer ici quelques uns des aspects remarquables de cet état collectif du gaz d'électrons dont nous ne parlerons pas ou peu : statistique d'anyons, propriétés de transport des liquides de Luttinger [70, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 105], fermions composites [106, 107, 108, 109, 110, 111, 112], skyrmions<sup>1</sup> [113] etc.

Le point central de l'effet Hall quantique fractionnaire est d'inclure les interactions dans la description du système. Expérimentalement, on voit un plateau en champ magnétique dans la résistance Hall à une valeur fractionnaire  $p/q$  du quantum de résistance, avec  $q$  impair, et un minimum dans la résistance longitudinale. Nous nous limiterons ici à la description du plateau  $1/3$ , car il s'agit du plus marqué et du plus robuste par rapport au désordre et à la température. Contrairement à l'effet Hall quantique entier, les fractions n'apparaissent que dans des échantillons de très haute mobilité, essentiellement des hétérojonctions GaAs/AlGaAs ou des MOSFET en silicium.

---

<sup>1</sup>Les skyrmions concernent en fait l'effet Hall quantique entier, et plus précisément l'état  $\nu = 1$ . Nous le mentionnons ici en tant que développement récent de la théorie de l'effet Hall quantique.

Laughlin a été le premier à proposer une fonction d'onde d'essai pour décrire le fondamental de l'état fractionnaire  $1/3$ . Dans le même article [15], il montrait aussi l'existence de quasiparticules de charge fractionnaire. Ici, nous nous contenterons de décrire l'état fondamental du système tel que modélisé par Laughlin, et comment les charges fractionnaires apparaissent dans ce modèle. Puis nous décrirons notre expérience sur le bruit de grenaille, qui a mis en évidence l'existence de ces quasiparticules.

## 7.2 Propriétés de l'état fondamental

Formellement, on peut transposer la plupart des concepts présentés au chapitre précédent à l'effet Hall quantique fractionnaire [114]. Cependant, nous allons donner une description un peu plus détaillée de l'état fondamental.

Le fait que l'on observe une quantification de la résistance Hall indique que dans l'état fondamental, le liquide est incompressible [84] ; on déduit de la valeur du plateau  $h/3e^2$  que la densité électronique est quantifiée à un électron pour trois quanta de flux.

Laughlin a proposé une fonction d'onde pour décrire ce système [15, 115]. Il part de l'Hamiltonien en présence de champ magnétique et d'interactions :

$$H = \frac{1}{2m^*} \sum_j \left( \vec{p}_j - e\vec{A}_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{e^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|}$$

Les états propres du système sans interactions sont connus (cf. chapitre 6) : il s'agit des fonctions

$$\Psi_{0,m} = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi\ell_m^2 2^m m!}} e^{-\frac{z\bar{z}}{4\ell_m^2}}$$

d'énergie propre  $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$  (on est dans le plus bas niveau de Landau). Laughlin construit une fonction d'essai à partir de ces états à une particule en respectant les contraintes suivantes [115] :

- L'Hamiltonien étant invariant par translation du centre de masse, cette fonction ne doit dépendre que de la position relative des particules
- Elle doit fortement diminuer la probabilité de trouver deux particules proches afin de minimiser l'énergie de Coulomb
- L'anti-symétrie due à la statistique de Fermi doit être respectée

Une fonction d'onde simple à  $N$  électrons qui répond à ces conditions

prend la forme<sup>2</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_m = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m e^{-\frac{1}{4} \left\{ \sum_l |z_l|^2 \right\}} \\ m \text{ impair} \end{array} \right.$$

où toutes les longueurs ont été normalisées à la longueur magnétique. Il a été montré que la fonction d'onde de Laughlin est exacte pour une interaction de cœurs durs où les interactions à longue portée sont ignorées [116].

Une très belle analogie avec les plasmas à deux dimensions [84, 115] permet de montrer que la valeur de  $m$  qui minimise le mieux l'énergie pour  $\nu = 1/3$  est  $m = 3$ . La densité électronique vaut alors :

$$\rho = \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi\ell_m^2}$$

Il y a donc exactement un électron pour trois quanta de flux.

La fonction d'onde de Laughlin est une fonction d'essai ; en la comparant à un calcul numérique exact, à partir de l'Hamiltonien total et pour peu d'électrons, on peut se convaincre qu'elle est tout à fait pertinente [115].

## 7.3 Excitations élémentaires

Une fois que l'on connaît l'état fondamental, il est naturel de s'intéresser aux excitations élémentaires du système, ou quasiparticules. L'expérience de pensée de Laughlin, qui permet de générer simplement ces quasiparticules, est basée sur le fait que l'on passe d'un état propre de l'Hamiltonien à un autre en ajoutant de manière adiabatique un quantum de flux dans le système.

On considère un système en régime d'effet Hall quantique fractionnaire, avec  $\nu = 1/3$ . L'état fondamental est donc un liquide incompressible d'électrons, avec un électron pour trois quanta de flux. Supposons que l'on introduise un solénoïde infiniment fin dans ce système, à un endroit que l'on choisit arbitrairement comme étant l'origine. On ajoute de manière adiabatique dans ce solénoïde un quantum de flux  $\phi_0 = h/e$ . On sait que l'on obtient alors un nouvel état propre de l'Hamiltonien : on n'a fait que translater radialement tous les états à une particule.

Cependant, l'ajout de ce quantum de flux crée un champ électrique radial :

$$E_\phi = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\phi}{dt}$$

---

<sup>2</sup>On peut montrer que ce sont les seules possibles [15, 115].

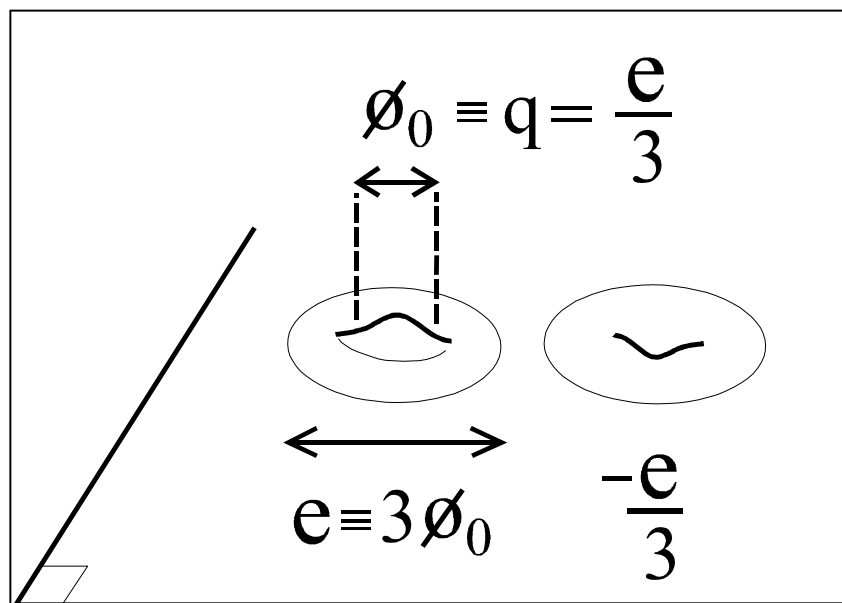


FIG. 7.1 – Création d'une quasiparticule : on ajoute de manière adiabatique dans le système un quantum de flux  $\phi_0$ . On retrouve alors un état propre de l'Hamiltonien ; cependant, comme il y a un électron pour trois quanta de flux dans le fondamental, l'ajout d'un quantum de flux a généré une excitation de charge  $e/3$ .

où  $R$  est un contour arbitraire. Comme la résistance est quantifiée, le courant engendré vaut :

$$j_r = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\phi}{dt} \nu \frac{e^2}{h}$$

Finalement, l'ajout d'un quantum de flux  $\phi_0$  crée une charge totale :

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi R \int j_r dt = \nu \frac{e^2}{h} \int \frac{d\phi}{dt} dt = \nu \frac{e^2}{h} \phi_0 \\ &= \nu e \end{aligned}$$

Pour l'état  $\nu = 1/3$ , les excitations élémentaires en régime d'effet Hall quantique fractionnaire ont une charge fractionnaire  $e/3$ . C'est là une des propriétés les plus remarquables de l'effet Hall quantique.

L'énergie d'une quasiparticule peut être estimée en considérant une charge  $e/3$  uniformément répartie sur un disque de rayon  $\ell_m$  :

$$U_{Disque} = \frac{(e/3)^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0\ell_m}$$

Le champ magnétique intervient *via* la longueur  $\ell_m$  : le gap devrait donc croître comme  $\sqrt{B}$ . Dans nos échantillons, on a le plateau  $\nu = 1/3$  à  $12T$  ; expérimentalement, le gap mesuré à ce champ vaut [117, 118] :

$$\Delta \approx 2K$$

Cette procédure pour générer les excitations peut être appliquée à d'autres états fractionnaires  $p/q$  [119]. Enfin, il est possible, en suivant la démarche de Laughlin, d'écrire des fonctions d'onde d'essai incluant une quasiparticule ou un quasitrou [120, 121]. Nous ne détaillerons pas ces deux points ici.





## Chapitre 8

# Détermination de la charge des quasiparticules de Laughlin

### Introduction

Nous avons vu qu'un des aspects les plus spectaculaires de l'effet Hall quantique fractionnaire réside dans l'existence de quasiparticules de charge fractionnaire. Elles ont aussi été prédites dans les systèmes unidimensionnels, mais leur réalisation expérimentale est délicate et elles n'ont jamais été observées [122, 123].

Cependant, si ce résultat arrive assez naturellement dans la description de Laughlin de l'état  $1/3$ , une mesure expérimentale de ces quasiparticules n'est pas une chose aisée. En effet, les mesures de transport ne permettent de sonder que la nature de l'état fondamental : la résistance Hall quantifiée, par exemple, indique qu'il y a un électron pour trois quanta de flux dans le fondamental [84], mais ne donne aucune indication sur les excitations [117].

Différentes tentatives ont été faites pour mesurer la charge de ces quasiparticules : certaines utilisent l'activation thermique des quasiparticules à partir du bulk [124, 125, 126], ou les oscillations d'Aharonov-Bohm dans une anti-boîte quantique [127, 128, 129, 130]. Cependant, aucune d'entre elles ne permet de déduire la charge des quasiparticules sans ambiguïté.

Kane et Fisher ont proposé, en 1994, d'utiliser le bruit de grenaille pour mesurer la charge des excitations [16, 131]. Dans la limite poissonienne, le bruit de grenaille est directement proportionnel à la charge des porteurs qui tunnelent (cf. § 3.1). S'il est possible de faire tunneler des quasiparticules de Laughlin, alors la mesure du bruit en courant associé donne la charge des quasiparticules.

Cependant, nous avons vu dans la partie II que dans un conducteur mé-

soscopique, le bruit de grenaille était réduit par le principe de Pauli. On peut s'attendre à ce que des effets similaires apparaissent ici. Il est effectivement possible de calculer la réduction du bruit de grenaille pour des quasiparticules, et il existe une solution exacte pour un cas simple [69, 132]. Dans la limite poissonnienne, on retrouve le bruit de grenaille  $2qI$ . Ceci peut se comprendre aisément : le bruit de grenaille poissonnien n'est fondamentalement lié qu'à l'émission stochastique de porteurs, quel que soit le système considéré. Il est donc nécessaire, dans tout modèle, de retrouver le bruit de grenaille classique dans la limite poissonnienne, tout comme il est nécessaire de retrouver le bruit thermique dans la limite où la tension aux bornes du système est nulle. Si on se place dans ce régime, le bruit de grenaille nous donne bien la charge des porteurs, indépendamment de toute autre considération.

## 8.1 Bruit de grenaille en régime d'effet Hall quantique fractionnaire

### 8.1.1 Principe

Dans les échantillons mésoscopiques, en régime d'effet Hall quantique, le transport se fait par les états de bord. Sur un plateau, la résistance longitudinale est nulle : le transport se fait de manière adiabatique entre les contacts. À  $\theta = 0$ , de la même façon qu'en champ nul ou dans l'effet Hall entier, il n'y a pas de fluctuations dans le canal fractionnaire émergeant d'un contact ; pour observer du bruit de grenaille, il faut induire une partition des porteurs entre états transmis et réfléchis. Pour cela, on utilise un contact ponctuel quantique : en polarisant le point-contact, on rapproche les deux états de bord, et on induit un tunneling faible de quasiparticules de l'état de bord droit vers l'état de bord gauche. Une particule qui tunnelle inverse sa vitesse ( $k_F \rightarrow -k_F$ ) : elle est réfléchi. Une particule qui ne tunnelle pas reste sur le même état de bord ; elle est transmise.

Les canaux de bord permettent donc de séparer spatialement les faisceaux incident, réfléchi et transmis (figure 8.1).

### 8.1.2 Approche intuitive

Le bruit de grenaille en régime d'effet Hall quantique fractionnaire est plus subtil à considérer qu'en champ nul. En effet, les quasiparticules de charge fractionnaire sont les excitations élémentaires de l'état fondamental  $1/3$ , qui est un état collectif des électrons. Elles ne peuvent donc exister qu'au sein de

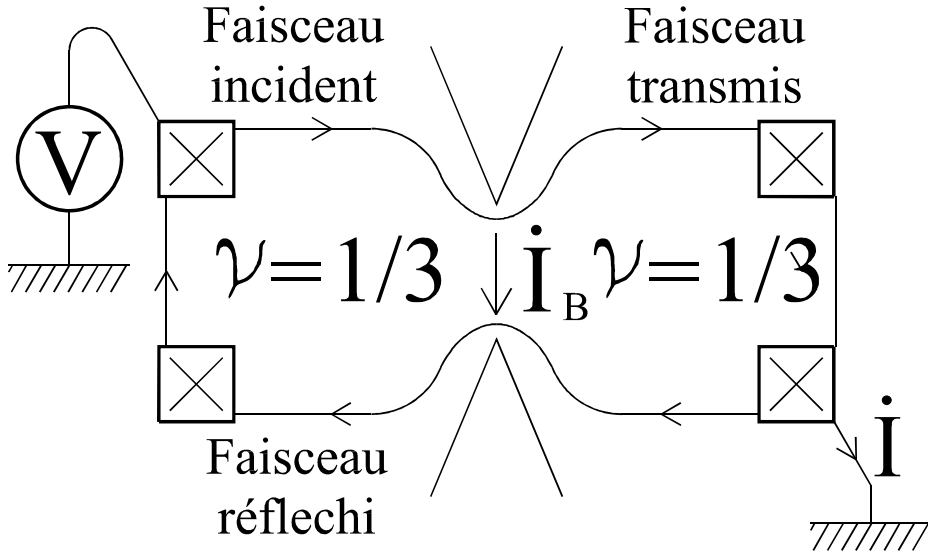


FIG. 8.1 – Partition des quasiparticules par le contact ponctuel quantique. Une quasiparticule incidente est soit réfléchi, soit transmise. Elle se retrouve alors sur deux états de bord spatialement séparés ; en utilisant les états de bord, on peut donc distinguer le faisceau réfléchi du faisceau transmis.

cet état collectif. Il faut donc préciser les conditions pour pouvoir observer le bruit de grenaille des quasiparticules de Laughlin.

### Forte rétrodiffusion

Si on applique une tension très négative sur le point-contact, on se retrouve dans le cas d'une forte rétrodiffusion : l'état de bord est complètement réfléchi (figure 8.2). Le système est alors coupé en deux, les deux sous-systèmes étant eux-mêmes en régime d'effet Hall quantique fractionnaire. La région de déplétion intermédiaire n'est par contre pas en régime d'effet Hall fractionnaire. Il ne peut donc pas y avoir de quasiparticules de Laughlin dans cette région. La figure 8.3 représente le potentiel vu par les quasiparticules.

Les seules particules qui peuvent tunneler sont donc des électrons, et on s'attend à ce que le bruit de grenaille associé avec ce courant soit donné par :

$$S_I = 2eI$$

dans la limite de faible transmission. Ce résultat reflète une statistique poissonienne, caractérisant des événements-tunnel non corrélés.

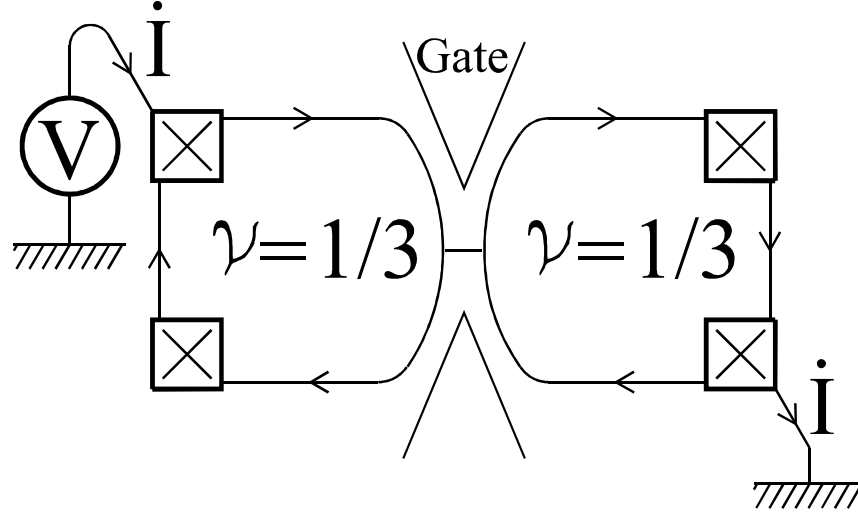


FIG. 8.2 – Limite de forte rétrodiffusion ; lorsque le point-contact réfléchit complètement l'état de bord, on coupe le système en deux parties distinctes. Les quasiparticules de Laughlin existent dans chacune d'entre elles, mais elles n'existent pas dans la région centrale. Ce sont donc des électrons qui vont tunneler entre les deux sous-systèmes, et le bruit vaut :  $S_I = 2eI$ .

### Faible rétrodiffusion

Dans le cas d'une faible rétrodiffusion (figure 8.4), les quasiparticules peuvent tunneler entre les états de bord à travers la région en régime d'effet Hall quantique fractionnaire. La figure 8.5 représente le potentiel vu par les quasiparticules.

Dans ce régime, la rétrodiffusion est un processus purement quantique. En effet, le potentiel reste toujours inférieur à l'énergie de Fermi. Une particule classique d'énergie  $E_F$  ne subirait aucune réflexion. La rétrodiffusion vient de l'aspect ondulatoire des particules.

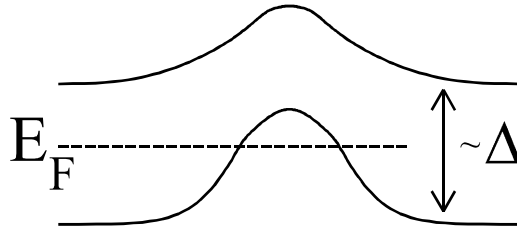


FIG. 8.3 – Potentiel vu par les quasiparticules dans le cas d'une forte rétrodiffusion.

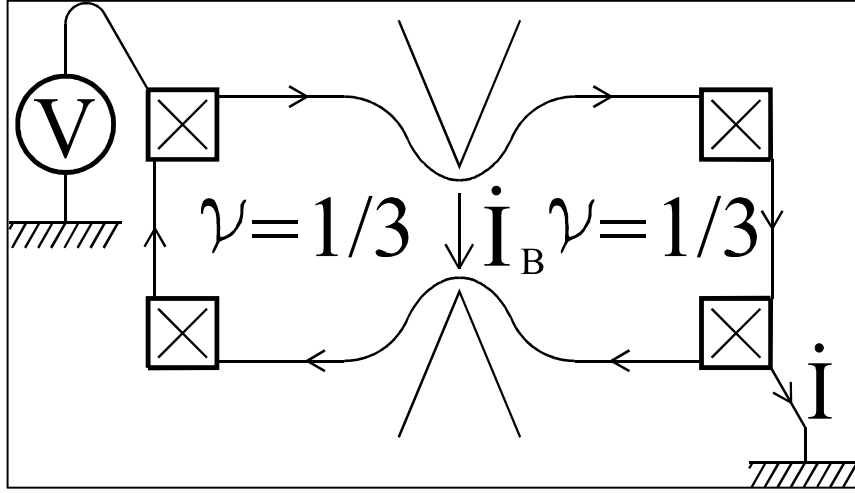


FIG. 8.4 – Régime de faible rétrodiffusion. Dans ce cas, ce sont des quasiparticules qui tunnelent, *via* une région en régime d'effet Hall quantique fractionnaire. Le bruit associé vaut :  $S_{I_B} = 2e^* I_B$ .

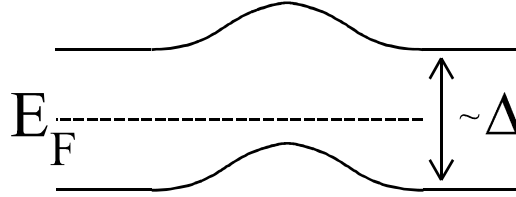


FIG. 8.5 – Potentiel vu par les quasiparticules dans le cas d'une faible rétrodiffusion.

On définit le courant de rétrodiffusion comme le courant provoqué par le tunneling de ces quasiparticules. Comme on injecte dans l'échantillon un courant  $I$  qui retourne vers la masse, et que le courant sans rétrodiffusion serait donné par :

$$I_0 = \nu \frac{e^2}{h} V_{ds}$$

le courant de rétrodiffusion  $I_B$  s'exprime par :

$$I_B = \nu \frac{e^2}{h} V_{ds} - I$$

Dans un liquide de Luttinger, la densité d'états des électrons s'annule au niveau de Fermi, tandis que celle des quasiparticules diverge (cf. paragraphe suivant) : ce courant  $I_B$  est cette fois un courant de quasiparticules

de Laughlin, bien qu’une contribution due aux électrons puisse apparaître à forte tension. Le bruit de grenaille associé, dans la limite poissonnienne de faible  $I_B$ , est donné par la formule de Schottky :

$$\begin{aligned} S_{I_B} &= 2e^* I_B \\ &= 2(e/3) I_B \end{aligned}$$

Ce bruit donne une mesure directe de la charge des quasiparticules  $e^* = e/3$ . C’est l’expérience proposée originalement par Kane et Fisher [16, 131].

### Influence de la température

Nous avons vu dans la partie II que dans un contact ponctuel quantique en champ nul, on passait continuellement du bruit thermique au bruit de grenaille. On trouve le même comportement en régime d’effet Hall quantique fractionnaire.

Le bruit thermique est dû aux fluctuations dans le canal de bord incident. À tension nulle, on retrouve le bruit d’équilibre quel que soit le taux de rétrodiffusion [132] :

$$S_{I_B} = 4k_B\theta G$$

avec  $G$  la conductance.

Dans la limite de faible rétrodiffusion<sup>1</sup>, la transition entre le bruit thermique et le bruit de grenaille est donnée par [16] :

$$S_{I_B} = \left[ 2e^* I_B \coth \left( \frac{e^* V_{ds}}{2k_B\theta} \right) - 2k_B\theta \frac{dI_B}{dV_{ds}} \right] + \underbrace{4k_B\theta \frac{dI}{dV_{ds}}}_{\text{Contribution du bruit thermique hors équilibre}} \quad (8.1)$$

Dans l’article original de Kane et Fisher, seules ces deux limites simples sont envisagées. Pour aller plus loin, il faut adopter une approche par “ paquets d’ondes ” [132].

### 8.1.3 Approche par “ paquets d’ondes ”

Aller au-delà de ces limites intuitives n’est pas aisé : on a vu que pour un contact ponctuel quantique en champ nul, lorsque la transmission augmente,

---

<sup>1</sup>Dans la limite de forte rétrodiffusion, on trouve la formule symétrique [16] :

$$S_I = 2eI \coth \left( \frac{eV_{ds}}{2k_B\theta} \right)$$

le principe de Pauli corréle le flot d'électrons, ce qui réduit le bruit de grenaille. Dans le cas de l'effet Hall quantique fractionnaire, les états de bord ne forment plus un liquide de Fermi mais un liquide de Luttinger [91, 92]. Les difficultés rencontrées dans le calcul du courant se retrouvent naturellement dans le calcul du bruit, qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation courant-courant.

Le calcul du courant en régime d'effet Hall quantique fractionnaire a été fait par de nombreux auteurs, en étendant les méthodes utilisées pour les systèmes unidimensionnels en interaction [94, 105, 133, 134, 135], ou, dans un esprit plus proche de la formule de Landauer, en utilisant des paquets d'ondes [70, 96]. Nous ne détaillerons pas ici ces méthodes ni leurs résultats ; nous nous contenterons d'évoquer brièvement les bases de l'approche par paquets d'ondes, après avoir montré que la dynamique des états de bord est similaire à celle des liquides de Luttinger.

### Les états de bord comme liquides de Luttinger

**Approche classique** Les états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire peuvent être vus comme une réalisation particulière d'un liquide de Luttinger. Nous avons vu que la relation de dispersion, du fait du confinement, présentait des analogies avec les systèmes unidimensionnels. Ici, nous présentons une approche due à Wen [91, 92], qui établit le parallèle avec les liquides de Luttinger par un modèle hydrodynamique.

Wen considère une “ goutte ” de liquide Hall quantique (figure 8.6) : il s'agit d'un fluide incompressible à deux dimensions, dont la densité est fixée (liquide incompressible) :  $n_s = \nu n_{\phi_0} = \nu / 2\pi \ell_m^2$ . À deux dimensions, les seules excitations possibles sont des ondes se déplaçant au bord de la goutte. Si  $h(x)$  représente le déplacement, la densité à une dimension est donnée par :

$$\rho(x) = n_s h(x)$$

qui vérifie l'équation de propagation :

$$\partial_t \rho - v \partial_x \rho = 0 \quad (8.2)$$

L'énergie s'obtient simplement en multipliant la charge par le potentiel :

$$E_p = \frac{1}{2} \int \underbrace{V(x)}_{\text{Potentiel}} \underbrace{en_s h(x) dx}_{\text{Charge}}$$

Les électrons sont confinés par un champ électrique perpendiculaire au bord de la goutte. Ce champ est relié au champ magnétique par :

$$E_0 = vB$$

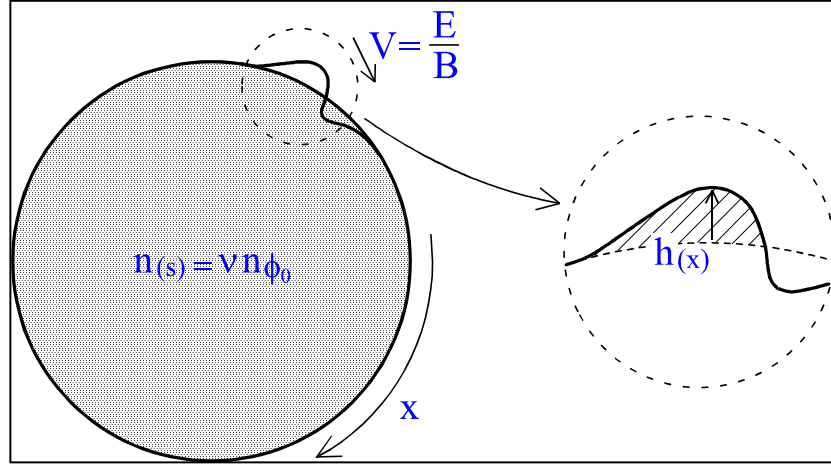


FIG. 8.6 – Modèle hydrodynamique de Wen : on considère une goutte de liquide incompressible à deux dimensions, dont la densité est donnée par le facteur de remplissage de l'effet Hall quantique. Les excitations élémentaires de ce système sont des "vaguelettes" qui propagent une déformation de la goutte le long du bord dans une seule direction (système chiral).

Le potentiel vaut donc :

$$V(x) = vBh(x)$$

Finalement, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}evB \int n_s h(x) n_s h(x) \frac{1}{n_s} dx \\ &= \frac{1}{2}evB \int n_s h(x) n_s h(x) \frac{1}{\nu/2\pi\ell_m^2} dx \end{aligned}$$

En utilisant  $\ell_m^2 = \hbar/eB$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \frac{v\hbar/2\pi}{\nu} \int \rho^2(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{vh}{\nu} \int \rho^2(x) dx \end{aligned}$$

On voit que dans cette approche, le facteur de remplissage  $\nu$  apparaît naturellement du fait de l'incompressibilité du liquide.

En désignant par  $L$  le périmètre de la goutte, la transformée de Fourier de  $\rho$  est définie par :

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int \rho(x) e^{ikx} dx \quad (8.3)$$



### 8.1. BRUIT DE GRENAILLE EN RÉGIME D'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE 1

Dans l'espace des  $k$ , la relation de conservation 8.2 devient :

$$\dot{\rho}_k = i\nu k \rho_k \quad (8.4)$$

et l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{h\nu}{\nu} \sum_k \rho_k \rho_{-k} \\ &= \frac{h\nu}{\nu} \sum_{k>0} \rho_k \rho_{-k} \end{aligned}$$

On définit la coordonnée normale  $q$  par  $q = \rho_k$ , et en utilisant les équations d'Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

et la relation 8.4, on obtient pour la coordonnée normale  $p$  :

$$p_k = i \frac{h}{\nu} \frac{1}{k} \rho_{-k}$$

C'est le point de départ de l'approche de Wen [92]. Pour aller plus loin, il faut quantifier cette théorie classique.

**Quantification** Pour quantifier, la procédure standard est que  $\rho$  et  $p$  doivent être des opérateurs qui vérifient :

$$[p_k, \rho_{k'}] = i\hbar \delta_{k,k'}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} [\rho_k, \rho_{k'}] &= -i \frac{\nu}{h} k' [\rho_k, p_{-k'}] \\ &= \frac{\nu}{2\pi} k \delta_{k,-k'} \\ [H, \rho_k] &= \frac{h\nu}{\nu} \sum_{k'>0} [\rho_{k'} \rho_{-k'}, \rho_k] \\ &= 2\hbar \nu k \rho_k \end{aligned} \quad (8.5)$$

Ces relations de commutation sont celles qui apparaissent dans les modèles de Tomonaga-Luttinger[136, 137]. Il est pratique d'introduire alors un champ  $\phi$  défini par :

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \partial_x \phi$$

Physiquement,  $\phi$  représente la densité intégrée le long d'un bord. En utilisant la définition de la transformée de Fourier A.1.3 et la relation de commutation 8.5, on montre que :

$$\begin{aligned} [\rho(x), \phi(x')] &= -\frac{i\nu}{2} \delta(x - x') \\ [\phi(x), \phi(x')] &= -i\pi \text{sgn}(x - x') \end{aligned} \quad (8.6)$$

Dans l'espace réel,  $\phi(x)$  est donc le champ conjugué à  $\rho(x)$ .

Il s'agit ensuite de définir les opérateurs de création et d'annihilation de fermions, qui représentent l'ajout ou le retrait d'un électron sur un bord. Ils sont particulièrement importants lorsqu'on s'intéresse, par exemple, au tunneling d'électrons dans un liquide Hall quantique fractionnaire [97], ou au régime de forte rétrodiffusion.

L'opérateur  $\Psi^+$ , en ajoutant un électron au point  $x$ , crée un pic delta dans la densité. Il doit donc vérifier :

$$[\rho(x), \Psi^+(x')] = \delta(x - x') \Psi^+(x)$$

En rapprochant le commutateur 8.6 de la relation :

$$\begin{aligned} [\alpha(\lambda), \beta(\lambda')] &= -i\delta(\lambda - \lambda') \\ \Rightarrow [\alpha(\lambda), e^{i\beta(\lambda')}] &= \delta(\lambda - \lambda') e^{i\beta(\lambda')} \end{aligned}$$

on peut supposer :

$$\Psi^+(x') \sim e^{\frac{i}{\nu}\phi(x)}$$

Il reste à vérifier que ce sont bien des opérateurs de fermions<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \Psi^+(x) \Psi^+(x') &= e^{\frac{i}{\nu}\phi(x')} e^{\frac{i}{\nu}\phi(x)} e^{\left(\frac{i}{\nu}\right)^2 \frac{1}{2} [\phi(x), \phi(x')]} \\ \Psi^+(x') \Psi^+(x) &= e^{\frac{i}{\nu}\phi(x)} e^{\frac{i}{\nu}\phi(x')} e^{\left(\frac{i}{\nu}\right)^2 \frac{1}{2} [\phi(x'), \phi(x)]} \end{aligned}$$

En utilisant la relation 8.6 pour calculer l'exponentielle, on obtient :

$$\Psi^+(x') \Psi^+(x) = e^{i\frac{\pi}{\nu}} \Psi^+(x) \Psi^+(x')$$

On voit que  $\nu$  doit être de la forme  $1/m$ , avec  $m$  impair. À partir d'un modèle hydrodynamique quantifié, et en supposant que le liquide Hall est incompressible, Wen a donc montré que les états de bord forment un liquide de

---

<sup>2</sup>On utilise la relation :

$$e^A e^B = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A, B]}$$

valable quand  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ .

## 8.1. BRUIT DE GRENAILLE EN RÉGIME D'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE 1

Lüttinger, et que la densité doit être quantifiée en fractions de dénominateurs impairs.

À partir du champ  $\phi$ , on peut construire les opérateurs de création et d'annihilation de quasiparticules :

$$\Psi_{qp}^+ \sim e^{i\phi}$$

Les relations de commutation deviennent :

$$[\rho(x), \Psi_{qp}^+(x')] = \nu \delta(x - x') \Psi_{qp}^+(x)$$

L'opérateur  $\Psi_{qp}^+(x)$  crée donc une charge fractionnaire  $\nu$  au point  $x$ . Ce sont les quasiparticules de Laughlin, de charge  $e^* = e/3$  dans le cas de l'état Hall fractionnaire  $1/3$ .

La statistique de ces quasiparticules est obtenue en calculant  $\Psi_{qp}^+(x), \Psi_{qp}^+(x')$  :

$$\begin{cases} \Psi_{qp}^+(x) \Psi_{qp}^+(x') = e^{i\phi(x')} e^{i\phi(x)} e^{i^2 \frac{1}{2} [\phi(x), \phi(x')]} \\ \Psi_{qp}^+(x') \Psi_{qp}^+(x) = e^{i\phi(x)} e^{i\phi(x')} e^{i^2 \frac{1}{2} [\phi(x'), \phi(x)]} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi_{qp}^+(x) \Psi_{qp}^+(x') = e^{i\nu\pi} \Psi_{qp}^+(x') \Psi_{qp}^+(x)$$

Comme on a vu que  $\nu = 1/m$ , avec  $m$  impair, ces quasiparticules ont une statistique fractionnaire : l'échange de deux particules fait intervenir un terme de phase  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  dans le cas des quasiparticules de Laughlin.

**Application à l'effet Hall quantique fractionnaire** Dans ce modèle, Wen ne considère qu'un seul bord : le système se referme sur lui-même. Dans un échantillon réel, il y a deux états de bord se déplaçant en sens inverses. Cela revient à couper la goutte en deux, et à mettre deux réservoirs qui absorbent les excitations qu'ils reçoivent, et en émettent d'autres. Techniquement, dans la description précédente, il faut définir les champs  $\phi$  et les opérateurs  $\Psi$  et  $\Psi_{qp}$  sur chaque état de bord.

Une des propriétés remarquables des ces systèmes est que les excitations élémentaires, ou quasiparticules, ne sont pas des électrons mais des excitations collectives du liquide. En particulier, on peut voir que les états à  $N$  électrons et  $N + 1$  électrons sont orthogonaux [136, 137] : si  $|F\rangle$  est l'état fondamental du système,  $\langle F | \Psi^+ | F \rangle = 0$ . Cela se traduit par l'impossibilité de faire tunneler un électron vers un état de bord. En calculant le propagateur  $\langle T(\Psi^+(x, t) \Psi(0)) \rangle$ , qui représente l'évolution d'une particule à partir

du moment où elle est injectée dans le système, on peut calculer la densité d'états, qui vaut [92] :

$$g(E) \sim E^{\frac{1}{\nu}-1}$$

Pour des électrons, nous avons vu que  $\nu = 1/m$ , avec  $m$  impair. L'impossibilité de faire tunneler un électron se traduit par l'annulation de la densité des électrons au niveau de Fermi. La conductance entre un liquide de Fermi et un état de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire prend alors la forme :

$$G \sim V^{\frac{1}{\nu}-1}$$

et s'annule à tension nulle.

En régime de forte rétrodiffusion, ce sont les opérateurs  $\Psi_R^+ \Psi_L$  qui interviennent : on prend un électron sur un bord et on l'amène vers l'autre. Comme la création d'un trou dans le canal de gauche et d'un électron dans le canal de droite sont deux processus "interdits", on trouve dans la conductance le double de la puissance précédente :

$$G \sim V^{2(\frac{1}{\nu}-1)} \sim V^4$$

dans le cas de l'effet Hall quantique à  $\nu = 1/3$ .

En régime de faible rétrodiffusion, on fait tunneler des quasiparticules d'un bord à l'autre, ce qui fait intervenir les opérateurs  $\Psi_{qp_R}^+ \Psi_{qp_L}$ . L'opérateur de création des quasiparticules fait intervenir un terme  $e^{i\phi}$  :

$$\underbrace{\Psi^+(x') \sim e^{\frac{i}{\nu}\phi(x)}}_{\text{Électron}} \rightarrow \underbrace{\Psi_{qp}^+(x') \sim e^{i\phi(x)}}_{\text{Quasiparticule}}$$

On trouve :

$$g(E) \sim E^{\nu-1}$$

Les quasiparticules, qui sont les excitations propres du système, ont donc une densité d'états qui diverge au niveau de Fermi. Ceci est très important dans notre expérience : en régime de faible rétrodiffusion, et pour des tensions modérées, le tunneling dominant est celui des quasiparticules, dont la densité d'états diverge, et non d'électrons, dont la densité d'états s'annule.

La conductance entre deux états de bord nécessite la création d'un quasitrou d'un côté et d'une quasiparticule de l'autre. Elle fait donc intervenir le produit de deux densités d'états :

$$G \sim V^{2(\nu-1)} \sim V^{-4/3}$$

dans le cas  $\nu = 1/3$  qui nous concerne.

Dans ce paragraphe, nous avons décrit succinctement l'approche hydrodynamique de Wen [91, 92], qui amène à considérer les états de bord de l'effet Hall quantique comme des liquides de Luttinger. Dans le paragraphe suivant, nous décrirons comment Fendley, Ludwig et Saleur, en partant de l'Hamiltonien bosonisé, et en faisant un changement de variables sur les champs  $\phi$ , construisent leur modèle de “ paquets d'ondes ” qui leur permet de calculer la conductance et le bruit.

### Construction des “ paquets d'ondes ”

L'approche par paquets d'onde développée par Martin et Landauer [14, 52, 53, 68] permet de calculer très simplement le bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique. La difficulté pour l'étendre au régime d'effet Hall quantique fractionnaire consiste à construire une base pour les paquets d'ondes pour un liquide de Luttinger.

Fendley, Ludwig et Saleur partent de l'Hamiltonien bosonisé [69, 132] :

$$H = \frac{\pi v_F}{\nu} \int dx (\rho_L^2 + \rho_R^2)$$

La rétrodiffusion au niveau du point-contact fait intervenir des opérateurs  $\Psi_R^+ \Psi_L$ . En les réexprimant en fonction du champ de bosons  $\phi$ , on obtient un Hamiltonien pour la rétrodiffusion de la forme :

$$H_B = \lambda \cos(\phi_L(x=0) - \phi_R(x=0))$$

où on a choisi arbitrairement de mettre le point-contact en  $x=0$ , et  $\lambda$  est un paramètre qui représente la force de la rétrodiffusion. L'Hamiltonien total devient [70] :

$$H = \frac{\pi v_F}{\nu} \int dx (\rho_L^2 + \rho_R^2) + \lambda \cos(\phi_L(x=0) - \phi_R(x=0))$$

L'idée consiste alors à définir deux nouveaux champs de bosons,  $\phi^e$  et  $\phi^o$ , par la relation :

$$\begin{aligned} \phi^e(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_L(x, t) + \phi_R(-x, t)] \\ \phi^o(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_L(x, t) - \phi_R(-x, t)] \end{aligned}$$

$e$  et  $o$  désignant des bosons “ pairs ” et “ impairs ”.

La transformation  $x \rightarrow -x$  dans le champ  $\phi_R(-x, t)$  permet de se ramener à un système composé de deux branches qui vont dans le même sens (ou

deux états de bord qui tournent dans le même sens). De plus, le champ  $\phi^e$  donne la densité totale sur les deux branches :

$$Q^e = \int \partial_x \phi^e dx \approx Q_L + Q_R$$

C'est donc une quantité conservée dans le problème, même en présence de rétrodiffusion.

La rétrodiffusion, elle, dépend du facteur  $\cos(\phi_L(x=0) - \phi_R(x=0))$  : elle ne contient donc que le champ  $\phi^o$ . On peut le comprendre simplement : si le champ  $\phi^e$  donne la densité totale, le champ  $\phi^o$  donne la différence des densités entre les canaux de bord droit et gauche :

$$Q^o = \int \partial_x \phi^o dx \approx Q_L - Q_R$$

Un courant de rétrodiffusion a pour effet de transférer des charges d'un canal de bord à l'autre : il est donc relié au terme  $\partial_t Q^o$ , qui mesure le taux de transfert de ces charges.

Finalement, cette méthode permet de séparer les variables en un champ  $\phi^e$  qui décrit ce qui se passe dans les états de bord, et en un champ  $\phi^o$  qui décrit la rétrodiffusion des particules. Dans la suite, les auteurs s'intéressent donc uniquement à ce second champ, qui leur permet de calculer le courant et le bruit par une approche en termes de paquets d'onde.

L'Hamiltonien en  $\phi^o$  contient un terme quadratique et un terme non linéaire<sup>3</sup> en  $\cos \phi^o$ . Cet Hamiltonien peut être considéré comme un cas-limite d'un modèle intégrable [70], l'Hamiltonien de Sine-Gordon. Fendley, Ludwig et Saleur prennent comme base pour leur approche de paquets d'ondes les excitations élémentaires de ce modèle : il contient des “*kinks*”, de charge positive, et des “*anti-kinks*” de charge négative<sup>4</sup>.

### Calculs du courant et du bruit par la méthode des “ paquets d'ondes ”

Les *kinks* ont une densité d'états  $\rho(\theta)$ ,  $\theta$  étant un paramètre correspondant à leur énergie,  $\varepsilon \propto e^{\theta/2}$ . En l'absence de diffusion au niveau du

---

<sup>3</sup>De façon plus exacte, les auteurs arrivent à un Hamiltonien intégrable en “déchiralisant” le système, c'est à dire en faisant le changement de variables :

$$\begin{aligned} \phi_L^o(x, t) &= \phi^o(x, t) \text{ pour } x \succeq 0 \\ \phi_R^o(x, t) &= \phi^o(-x, t) \text{ pour } x \preceq 0 \end{aligned}$$

On arrive ainsi à deux champs définis uniquement sur le demi-espace  $x \succeq 0$ .

<sup>4</sup>Il existe aussi un troisième type d'excitations, les “breathers”. Comme elles ne sont pas chargées, elles n'ont pas d'influence dans le problème considéré.

## 8.1. BRUIT DE GRENAILLE EN RÉGIME D'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE 1

point-contact, le courant s'obtient par :

$$I_0(V_{ds}) = ev_F \int_{-\infty}^A \rho(\theta) d\theta = \nu \frac{e^2}{h} V_{ds}$$

et on retrouve la résistance Hall quantifiée<sup>5</sup>.

Si maintenant on pince le point-contact, on induit un couplage entre les états de bord de droite et de gauche. Dans cette représentation, le tunneling reviendra à transformer un *kink* en *anti-kink* (une charge + en une charge -). La probabilité de cet événement est notée  $S_{+-}$ , avec  $|S_{+-}|^2 + |S_{++}|^2 = 1$ . La barrière est paramétrisée<sup>6</sup> par  $T_B$ , et on pose  $T_B \propto e^{\theta_B/2}$  :

$$|S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2 = \frac{1}{1 + e^{[2(1-\nu)(\theta - \theta_B)/\nu]}}$$

Le courant de rétrodiffusion s'exprime alors par une relation de Landauer :

$$\begin{aligned} I_B &= ev_F \int_{-\infty}^A \rho(\theta) |S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2 d\theta \\ I &= I_0 - I_B \end{aligned}$$

En connaissant la forme de  $\rho(\theta)$  et de  $S$ , cette relation permet aux auteurs de calculer le courant analytiquement [70]. Les résultats sont obtenus sous forme de développements :

$$I = \nu \frac{e^2}{h} V \left[ 1 - \nu \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\nu) \left( \frac{eV}{T'_B} \right)^{2n(\nu-1)} \right]$$

dans la limite de faible rétrodiffusion (développement en  $T_B/V$ ),

$$I = \frac{e^2}{h} V \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{1}{\nu} \right) \left( \frac{eV}{T'_B} \right)^{2n(\frac{1}{\nu}-1)}$$

dans la limite de forte rétrodiffusion (développement en  $V/T_B$ ). Les coefficients  $a_n$  et  $T'_B$  dépendent de  $\nu$  et  $T_B$ . En gardant le premier terme de ces développements, on obtient :

$$\begin{aligned} G_{diff} &\propto V^{-4/3} \text{ dans la limite de faible rétrodiffusion} \\ G_{diff} &\propto V^4 \text{ dans la limite de forte rétrodiffusion} \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Le paramètre  $A$  est défini par :  $\rho(\theta) = 0$  pour  $\theta > A$ . C'est donc l'équivalent du niveau de Fermi pour des fermions.

<sup>6</sup>Il existe un lien assez subtil entre  $\theta_B$  et la tension de grille [70].

Pour calculer le bruit associé au tunneling, Fendley, Ludwig et Saleur utilisent une méthode analogue à celle des paquets d'ondes développée par Martin et Landauer [14], mais dans la base des *kinks*. La variable  $f$  compte le nombre de transformations  $kink \rightarrow anti - kink$  :

- $f = 1$  si un *kink* se transforme en *anti - kink* (la quasiparticule a sauté)
- $f = 0$  si un *kink* se transforme en *kink* (la quasiparticule n'a pas sauté)
- $\langle f^2 \rangle = \langle f \rangle$ ,  $\langle f \rangle = |S_{+-}|^2$

Tout comme dans le calcul de Martin et Landauer (cf. § 3.2.2), le bruit est alors proportionnel à  $\langle f^2 - \langle f \rangle^2 \rangle$ . On obtient finalement :

$$S_I = 2e^2 v_F \int_{-\infty}^A \rho(\theta) |S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2 [1 - |S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2] d\theta$$

Cette formule est l'équivalent de la relation 3.5 à température nulle.

Pour revenir à une expression du bruit en termes de courant, ils utilisent la relation :

$$|S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2 [1 - |S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2] = \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \theta_B} |S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2$$

très semblable à celle que l'on a pour une fonction de Fermi<sup>7</sup>.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_I &= \frac{\nu e}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \theta_B} \left[ e v_F \int_{-\infty}^A \rho(\theta) |S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2 d\theta \right] \\ &= \frac{\nu e}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \theta_B} I \\ &= -\frac{\nu e}{(1-\nu)} T_B \frac{\partial}{\partial T_B} I \end{aligned}$$

On a vu précédemment que la conductance ne dépendait que de  $V/T_B$ , qui caractérise la force de la rétrodiffusion. On peut alors utiliser la relation :  $\partial_x f(y/x) = -y/x^2 f'(y/x) = -y/x \partial_y f(y/x)$ , pour obtenir :

$$S_I = \frac{\nu e}{(1-\nu)} \left( V \frac{\partial I}{\partial V} - I \right)$$

ou, en utilisant  $I = I_0 - I_B$  :

$$S_I = \frac{\nu e}{(1-\nu)} \left( I_B - V \frac{\partial I_B}{\partial V} \right)$$

---

<sup>7</sup>Pour une fonction de Fermi, on a :  $f(1-f) = -k_B \theta \partial f / \partial E$ .



### 8.1. BRUIT DE GRENAILLE EN RÉGIME D'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE 1

En injectant dans cette relation les développements obtenus pour le courant, en ne gardant toujours que les premiers termes, on retrouve les résultats de Kane et Fisher [16, 69] :

$$\begin{aligned} S_I &= 2eI \text{ dans la limite de forte rétrodiffusion} \\ S_{I_B} &= 2(e/3)I_B \text{ dans la limite de faible rétrodiffusion} \end{aligned}$$

Les cas intermédiaires sont calculés numériquement, en utilisant la relation :

$$I = I_0 - I_B = 2\nu \frac{e^2}{h} V - ev_F \int_{-\infty}^A \rho(\theta) |S_{+-}(\theta - \theta_B)|^2 d\theta$$

Cette méthode a été étendue pour calculer le bruit à température finie [132] ; en particulier, on retrouve alors le bruit d'équilibre à tension nulle, quel que soit le taux de rétrodiffusion.

Il est donc possible d'étendre l'approche par paquets d'onde au bruit de grenaille en régime d'effet Hall quantique fractionnaire, en définissant correctement la base choisie au départ. Malheureusement, dans ce cas, les calculs sont beaucoup plus complexes qu'en champ nul.

Enfin, signalons que des travaux théoriques ont permis de calculer le bruit de grenaille de quasiparticules de Laughlin à fréquence finie [138, 139].

Le point crucial est que quel que soit le système considéré, on doit retrouver le bruit thermique à tension nulle, et le bruit poissonien de quasiparticules dans la limite de faible rétrodiffusion. C'est cette dernière propriété qui nous a permis de mesurer la charge des quasiparticules de Laughlin en régime d'effet Hall quantique fractionnaire.



# Chapitre 9

## Observation expérimentale des quasiparticules de charge fractionnaire

### 9.1 Dispositif expérimental

Le principe de la mesure est représenté sur la figure 9.1.

L'échantillon est amené en régime d'effet Hall quantique fractionnaire sur le plateau  $\nu = 2/3$ , puis on déplète le point-contact jusqu'à  $\nu = 1/3$ . On induit ensuite une faible rétrodiffusion de quasiparticules, et on mesure le bruit en fonction de la tension drain-source.

Nous avons utilisé le même dispositif expérimental que pour notre expérience sur le bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique (figure 4.3), sauf qu'ici l'échantillon est polarisé en tension : la tension est détectée entre les contacts 5 et 6, et 3 et 2, puis un analyseur de spectres calcule la corrélation entre les deux signaux. Il y a trois contributions dans le signal total :

- Le bruit de grenaille proprement dit, que l'on note  $S_{I_B}$
- Le bruit en courant des amplificateurs, au niveau des contacts 3 et 6, que l'on note  $S_{I_3}$  et  $S_{I_6}$  (le bruit en courant généré au niveau des contacts 2 et 5 retourne à la masse *via* les contacts 1 et 4)
- Le bruit en tension de la source de tension, qui a une impédance de  $100\Omega$ , et que l'on note  $S_{V_{14}}$ .

En utilisant les relations de Landauer-Büttiker, on obtient :

$$S_{V_{56}V_{32}} = R_{2/3}^2 S_{I_B} + \left(1 - \frac{R_{2/3}}{dV_{ds}/dI}\right)^2 [S_{V_{14}} + R_{2/3}^2 (S_{I_3} + S_{I_6})]$$

où  $R_{2/3}$  représente la résistance Hall quantifiée correspondant au facteur de remplissage dans les fils,  $R_{2/3} = (3/2) (h/e^2)$ . On voit que, comme dans l'expérience en champ nul, le signal que l'on veut mesurer ne représente qu'une partie du signal total. Il est donc impératif, au cours de l'expérience, de garder la résistance différentielle constante : le système ayant une caractéristique  $I(V)$  fortement non linéaire, il faut réajuster la valeur de la tension de grille à chaque fois que l'on change la tension de polarisation.

Les propriétés de l'effet Hall quantique nous permettent d'avoir une résistance calibrée intrinsèque à l'échantillon : on utilise la résistance Hall quantifiée pour convertir le bruit en courant intéressant  $S_{I_B}$  en bruit en tension. De plus, les bruits additionnels se trouvent divisés dans le rapport de la résistance Hall à la résistance différentielle du point-contact.

Le courant de rétrodiffusion s'obtient simplement à l'aide de la formule :

$$I_B = (2V_{56} - V_{ds}) \frac{e^2}{3h} = (2V_{32} - V_{ds}) \frac{e^2}{3h}$$

Finalement, si on fait passer  $1nA$  dans l'échantillon, et que l'on a un taux de rétrodiffusion de 10%, on obtient un bruit en courant<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \sqrt{S_{I_B}} &= \sqrt{2(e/3) \cdot 10^{-9} \cdot 0.1} \\ &= 3.27 fA / \sqrt{Hz} \end{aligned}$$

Le signal à détecter vaut alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{S_{V_{56}V_{32}}} &= 3.27 \cdot 10^{-15} \cdot (3/2) \cdot 25800 \\ &\approx 126 pV / \sqrt{Hz} \end{aligned}$$

Cette mesure n'est donc possible que si l'on a une résolution expérimentale<sup>2</sup> de l'ordre de  $40 pV / \sqrt{Hz}$ . L'électronique permet d'atteindre cette sensibilité : si on prend un signal de  $1.5 nV / \sqrt{Hz}$  (valeur typique du signal dans cette expérience), et que l'on fait  $5 \cdot 10^6$  moyennages<sup>3</sup>, on trouve une précision :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\langle S_V \rangle}{\sqrt{N}} \\ &\approx 30 pV / \sqrt{Hz} \end{aligned}$$

De plus, nous avons amélioré notre dispositif sur trois points :

---

<sup>1</sup>La limite de rétrodiffusion faible, c'est à dire du rapport du courant  $I_B$  au courant total, n'est pas clairement définie a priori. Cependant, nous verrons que lorsqu'on dépasse 15% de rétrodiffusion, on commence à avoir des déviations au bruit poissonien.

<sup>2</sup>On veut pouvoir faire par exemple dix points entre 0 et  $1nA$ .

<sup>3</sup>Cela correspond à 3000 acquisitions avec une bande passante de 1600 canaux.

- Les vibrations du réfrigérateur à dilution ont été fortement atténuées en fixant les tuyaux de pompage sur des masses, et en utilisant des “ silencieux ” sur le tuyau d’injection du mélange
- L’ensemble cryostat-amplificateurs a été placé dans une boîte de Faraday en cuivre, afin d’écranter les champs électromagnétiques à basse fréquence arrivant sur l’échantillon
- Une importante isolation et absorption acoustiques a été mise en place, afin de diminuer les bruits microphoniques, qui sont très efficacement ramenés sur l’échantillon *via* les câbles qui vibrent dans le champ magnétique

Ces modifications nous ont permis d’atteindre la résolution voulue, soit un gain d’un facteur 10 par rapport à l’expérience que nous avons faite en champ nul. L’amortissement des vibrations, qu’elles viennent du banc de pompage ou qu’elles soient acoustiques, est un point crucial : en champ magnétique fort ( $\gtrsim 6T$ ), les vibrations des câbles coaxiaux peuvent entraîner par induction un bruit important sur l’échantillon. Ce sont finalement les vibrations acoustiques qui sont les plus difficiles à éliminer, et qui limitent la résolution.

## 9.2 Échantillon

L’échantillon est fabriqué à partir d’une hétérojonction d’Arséniure de gallium, qui provient d’une autre croissance que celui que nous avons utilisé pour les mesures de bruit de grenaille en champ nul. Le gaz d’électrons, à  $100nm$  en-dessous de la surface, a une densité de  $0.95 \cdot 10^{11}cm^{-2}$  et une mobilité de  $10^6 cm^2V^{-1}s^{-1}$  à  $4.2K$  dans l’obscurité. La figure 9.2 représente un schéma de l’échantillon. Le méso, les contacts ohmiques et les grilles sont réalisés par lithographie électronique.

Le méso est large, afin de réduire au maximum la rétrodiffusion dans cette région qui constitue les “ fils ”. Il est très important de s’assurer que le tunneling des quasiparticules, induit par le potentiel de grille du point-contact, se fait par un nombre limité de chemins : dans le cas contraire, on pourrait avoir un facteur de réduction supplémentaire, comme dans le cas d’un système diffusif. La figure 9.3 est une photographie prise au microscope optique de la partie centrale du méso. On voit le départ des fils vers les contacts ohmiques, et les deux grilles en or du point-contact.

Les contacts ohmiques ont été optimisés afin de réduire leur résistance. En régime d’effet Hall quantique, le transport se fait par les canaux de bord : lorsque ceux-ci arrivent sur un contact ohmique, ils ont une certaine probabilité d’être réfléchis, auquel cas ils continuent à circuler le long du bord. On

a donc augmenté le périmètre des contacts ohmiques, afin d'augmenter la probabilité qu'un canal de bord incident soit absorbé. Pour cela, ils ont été dessinés en forme de créneaux (figure 9.2).

Le contact ponctuel quantique est ensuite réalisé par évaporation d'or. L'écartement entre les pointes est de  $275\text{nm}$ . Les deux grilles du point-contact ne sont pas connectées électriquement, afin de pouvoir les polariser séparément ; on peut ainsi déplacer latéralement les deux états de bord, et avoir plus de liberté pour faire varier le chemin de tunneling des quasiparticules.

Pour caractériser l'échantillon, on fait d'abord une mesure d'effet Hall. La figure 9.4 représente la variation des résistances Hall et longitudinale en fonction du champ magnétique, à une température<sup>4</sup> de  $70\text{mK}$ . On voit clairement les plateaux Hall quantifiés et des oscillations Shubnikov-de Haas bien contrastées. La largeur du méso entraîne des valeurs très faibles de la résistance longitudinale sur les minima. Des plateaux fractionnaires apparaissent très clairement aux facteurs de remplissage  $\nu = 1/3, 2/5, 2/3, 4/3$  et  $5/3$ , la résistance longitudinale valant  $1.6k\Omega$  sur le plateau  $1/3$  et  $3.2k\Omega$  sur le plateau  $2/3$ . Ceci indique la très bonne qualité de l'échantillon (les plateaux fractionnaires sont très sensibles au désordre). Les oscillations à la fin des plateaux (particulièrement visibles sur les plateaux 1 et  $2/3$ ) sont dues à une asymétrie de l'échantillon : les contacts ohmiques n'étant pas parfaitement symétriques, on mesure une partie de la résistance longitudinale dans la résistance Hall. Notons que la résistance longitudinale est mesurée de part et d'autre du point-contact, et elle est affectée par les inhomogénéités sous les grilles.

### 9.3 Caractérisation du contact ponctuel quantique

Nous avons fait nos expériences de bruit en partant du facteur de remplissage  $\nu = 2/3$ , puis en déplaçant le point-contact jusqu'à  $\nu = 1/3$  [140, 141]. De cette façon, les tensions appliquées sur les grilles sont plus importantes, et la forme du potentiel induit un tunneling plus localisé. En partant directement de  $\nu = 1/3$  dans les fils, on crée un grand nombre de chemins de tunneling, et il apparaît un facteur de réduction supplémentaire dans le bruit<sup>5</sup>.

---

<sup>4</sup>En champ magnétique, la magnétorésistance du thermomètre ne permet une précision que de l'ordre de 10% sur la température.

<sup>5</sup>Ce facteur de réduction est analogue au facteur  $1/3$  que l'on trouve dans les systèmes diffusifs. Un autre groupe semble cependant avoir réussi les mesures dans ces conditions [142].

La figure 9.5 représente la conductance différentielle en fonction de la tension de grille, à  $25mK$ . Les nombreuses résonances observées sont dues aux interférences entre les différents chemins de tunneling pour les quasiparticules. En appliquant une tension entre le drain et la source, on réduit la rétrodiffusion, et on retrouve la valeur quantifiée du plateau  $G = e^2/3h$ .

Ce comportement est totalement différent de celui observé sur les plateaux Hall entiers : c'est la signature d'un système de type liquide de Luttinger [98]. La figure 9.6 est un balayage de grille plus restreint autour de la dernière résonance de la courbe 9.5, toujours à  $25mK$  et pour différentes tensions drain-source. Cette résonance<sup>6</sup> a été optimisée en jouant sur les deux tensions de grille du point contact, et est quasiment parfaite : on passe d'une rétrodiffusion totale ( $G_{diff} = 0$ ) à la conductance Hall quantifiée ( $G_{diff} = e^2/3h$ ). C'est une indication claire qu'il s'agit d'une résonance sur le plateau  $1/3$ , et non qu'on a atteint la tension de pincement total (déplétion totale sous les grilles). On peut d'ailleurs s'en convaincre en comparant les valeurs de tension de grille avec la tension de pincement total mesurée sur les plateaux entiers. Enfin, en accord qualitatif avec les théories de liquide de Luttinger, on diminue la rétrodiffusion en appliquant une tension. On est donc dans la bonne configuration pour observer les quasiparticules de Laughlin. Les droites en tirets représentent les différentes résistances différentielles auxquelles nous avons effectué nos mesures de bruit.

La figure 9.7 représente la même information, mais cette fois en fonction de la tension drain-source, et à différentes tensions de grilles régulièrement espacées entre  $-171mV$  et  $-183mV$ . On voit qu'en jouant sur la tension drain-source et la tension de grille, on peut explorer tous les régimes depuis une rétrodiffusion totale jusqu'à une rétrodiffusion nulle. On peut le comprendre qualitativement de la manière suivante :

- En appelant  $V_B$  l'énergie caractéristique du couplage-tunnel, on est dans une situation de forte rétrodiffusion, correspondant au schéma 9.8, lorsque  $k_B\theta \ll V_B$  et  $eV_{ds} \ll V_B$  : ce sont des électrons qui tunnelent vers l'avant. En augmentant la tension, on fait tunneler plus d'électrons, ce qui augmente la conductance. La forme de la courbe reflète la densité d'états pour le tunneling d'électrons dans un liquide Hall fractionnaire : celle-ci s'annule à tension nulle, puis augmente comme une loi de puissance [96, 134]. Expérimentalement, on trouve une loi

$$G_{diff} \propto V_{ds}^2$$

en désaccord avec la valeur attendue  $V_{ds}^{2(\frac{1}{\nu}-1)} = V_{ds}^4$ . Il est possible aussi que nous observions l'exposant correspondant au facteur de remplissage

---

<sup>6</sup>Il s'agit plutôt d'une anti-résonance en réflexion.

dans les fils, soit 2. D'autres mesures, en faisant varier les différents paramètres, permettront sans doute de lever cette contradiction<sup>7</sup>.

- Lorsque,  $eV_{ds} \gg V_B$ , ce qui peut s'obtenir soit en augmentant la tension drain-source, soit en changeant la tension de grille, on est dans le cas d'une faible rétrodiffusion (schéma 9.9). Il devient alors possible de faire tunneler des quasiparticules de Laughlin d'un canal de bord à l'autre. Ce tunneling augmente avec la tension, ce qui diminue la conductance. On s'attend à une loi :  $G_{diff} \propto V_{ds}^{2(\nu-1)}$ , c'est à dire en  $V_{ds}^{-4/3}$ . C'est aussi le régime adéquate pour observer le bruit de grenaille des quasiparticules de Laughlin. Les droites en pointillés sur la figure 9.7 représentent l'excursion en tension que nous avons utilisée dans nos mesures de bruit.

Finalement, les caractéristiques  $I(V)$  de nos échantillons présentent un accord qualitatif avec les modèles de liquides de Luttinger [143]. Quantitativement, ces premières mesures montrent des déviations, en particulier en ce qui concerne les lois de puissance. Mais ces déviations ne doivent pas avoir de conséquences sur la mesure de bruit, tant que l'on reste dans la limite poissonnienne, c'est à dire tant que  $I_B \ll I$ .

## 9.4 Mesure du bruit de grenaille

### 9.4.1 Limite forte tension

Nous allons nous intéresser, dans un premier temps, au cas où la tension est très supérieure à la température. La bande passante choisie pour intégrer le signal est de  $4kHz$ , centrée autour de  $6kHz$  : cela nous permet d'éviter le bruit basse fréquence des appareils de mesure, et le bruit acoustique, beaucoup plus important en-dessous de  $2kHz$ . Le temps d'acquisition est de  $1500s$ , soit 3000 moyennages.

#### Résonance parfaite

Nous avons d'abord effectué une série de mesures sur la résonance parfaite de la figure 9.6. Les résistances différentielles ont été choisies égales à  $0.29e^2/h$ ,  $0.26e^2/h$  et  $0.22e^2/h$  (la valeur du plateau Hall est de  $0.33e^2/h$ ), correspondant aux chemins  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

La figure 9.10 représente le bruit en courant en fonction du courant de rétrodiffusion, pour une résistance différentielle de  $0.29e^2/h$ , et à une tempé-

---

<sup>7</sup>D'autres auteurs ont observé la loi en  $V_{ds}^2$  pour le tunneling dans un liquide de Luttinger à partir d'un liquide de Fermi [97].



rature de  $25mK$ . La valeur du bruit à courant nul ( $5.32 \cdot 10^{-28} A^2/Hz$ ) est due aux bruits en courant des amplificateurs et au bruit en tension de la source de tension. Les barres d'erreurs correspondent à l'incertitude attendue compte tenu du nombre d'acquisitions et du calcul de la corrélation. La tension de polarisation varie de  $40\mu V$  à  $78\mu V$ , tandis que la tension de grille change de  $-170.5mV$  à  $-178.5mV$  pour garder la résistance différentielle constante.

On voit que le bruit varie quasi-linéairement avec le courant : on mesure donc bien du bruit de grenaille (c'est le seul bruit qui a une variation linéaire en courant). La droite en tirets représente le bruit attendu pour des quasiparticules de Laughlin,  $S_{I_B} = 2e^* I_B$  : l'accord entre les points expérimentaux et la droite est excellent. À titre de comparaison, la droite en pointillés indique la variation de bruit attendue pour du tunneling d'électrons,  $S_{I_B} = 2e I_B$ .

Lorsqu'on augmente la tension de polarisation, le taux de rétrodiffusion,  $R = I_B / (eV_{ds}/3h)$ , augmente de façon quasi-linéaire depuis 4% jusqu'à environ 30%. L'hypothèse de bruit poissonien devient de moins en moins valable, et des déviations sont effectivement observées à la droite théorique. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il n'est pas possible de calculer analytiquement un facteur de réduction aussi simple que pour des fermions. Cependant, on peut supposer que la réduction du bruit est aussi due à un principe d'exclusion, et il peut sembler raisonnable que la première correction au bruit poissonien soit en  $(1 - R)$ , du moins tant que le tunneling d'électrons est négligeable. Nous avons donc reporté les mêmes points expérimentaux, mais cette fois en fonction de  $I_B (1 - R)$ . Ce sont les triangles sur la figure 9.10 : compte tenu des incertitudes expérimentales, on voit que ce simple facteur  $(1 - R)$  rend bien compte des déviations au bruit poissonien. Encore une fois, il n'y a pas de calcul théorique qui puisse rendre compte de ce facteur, et il n'est pas sûr qu'il reste pertinent pour des taux de réflexion encore plus forts.

Nous avons refait la même mesure en faisant varier la résistance différentielle. La figure 9.11 représente le bruit en courant en fonction du courant de rétrodiffusion, pour deux autres valeurs de la résistance différentielle,  $G_{diff} = 0.22e^2/h$  et  $G_{diff} = 0.26e^2/h$ , correspondant aux chemins  $B$  et  $C$  sur la figure 9.6. On trouve encore que le bruit mesuré correspond à un bruit de quasiparticules de Laughlin (droites en tirets), et non à un bruit d'électrons (droites en pointillés). De même, le simple facteur  $(1 - R)$  rend bien compte des déviations observées lorsque le taux de réflexion augmente.

Il semble donc établi que le bruit en régime d'effet Hall quantique fractionnaire est bien dû au tunneling de quasiparticules de charge  $e/3$ . Nous avons ensuite vérifié que ce résultat est indépendant de la configuration précise du tunneling, et de la température, toujours dans la limite poissonienne.

### Variation de la configuration de tunneling

En utilisant le contrôle indépendant des deux grilles du point-contact, on peut faire varier le chemin de tunneling des quasiparticules en déplaçant latéralement la constriction.

La figure 9.12 représente la résistance différentielle en fonction de la tension de grille, à  $25mK$ , après que l'on a désaccordé la résonance. Celle-ci n'est plus parfaite : la conductance ne remonte plus jusqu'à  $e^2/3h$ , et le contraste est beaucoup moins bon. Nous avons mesuré le bruit en courant dans cette configuration, en suivant le chemin indiqué par une droite en tirets. Le fait que l'on ne retrouve plus du tout la même trace en fonction de la tension de grille indique que la configuration de tunneling des quasiparticules a changé : en effet, la forme précise des résonances dépend des interférences entre les différents chemins de tunneling.

La figure 9.13 représente le bruit mesuré en fonction du courant de rétro-diffusion, pour cette résonance désaccordée, à une valeur de la résistance différentielle  $G_{diff} = 0.24e^2/h$ . La tension appliquée varie entre  $78\mu V$  et  $175\mu V$ , tandis que la tension de grille se déplace de  $-161mV$  à  $-177mV$ . On retrouve encore un excellent accord avec le bruit attendu pour des quasiparticules (droite en tirets), tandis que le bruit que produiraient des électrons est bien supérieur (droite en pointillés).

Cette mesure indique clairement que le bruit, dans la limite poissonienne, ne dépend pas de la configuration précise de tunneling, et en particulier que le facteur  $1/3$ , qui correspond à la charge des quasiparticules de Laughlin, n'est pas dû à un processus de réduction du bruit de grenaille d'électrons.

### Variation de la température

Nous avons vu que l'on s'attend à un cross-over entre le bruit thermique et le bruit de grenaille. Ici, nous allons nous intéresser à la partie asymptotique de la courbe, c'est à dire  $V_{ds} \gg \theta$ . Pour cela, nous avons fait une mesure de bruit en chauffant l'échantillon.

La figure 9.14 représente une mesure du bruit en fonction du courant, pour une résistance différentielle  $G_{diff} = 0.24e^2/h$ , et à une température  $\theta = 150mK$ . Dans toute cette mesure, on a  $V_{ds} \gg \theta$  : on ne s'intéresse donc qu'à la partie asymptotique du bruit de grenaille. Le bruit varie bien linéairement avec le courant, et sa dépendance suit la droite  $S_{IB} = 2e^*I_B$ . Le taux de réflexion  $R = I_B / (e^2V_{ds}/3h)$  augmente lorsque le courant augmente, et vaut 0.28, 0.44 et 0.48 respectivement pour les trois derniers points, ce qui explique les déviations observées à la loi linéaire. Les triangles représentent les mêmes points expérimentaux, mais en fonction de  $I_B(1 - R)$  : on retrouve

alors un accord excellent avec la droite attendue pour les quasiparticules (droite en tirets).

Nous avons montré que le bruit de grenaille en régime d'effet Hall quantique fractionnaire est dû à des quasiparticules de Laughlin de charge  $e/3$  : ce sont donc elles qui transportent le courant dans ce système [140]. Dans la limite poissonnienne, on mesure un bruit :  $S_{I_B} = 2e^*I_B$ . Ce résultat est indépendant de la configuration particulière de tunneling, et de la température. Lorsque le taux de réflexion  $R = I_B / (e^2V_{ds}/3h)$  augmente, on trouve des déviations à ce simple bruit poissonnien ; expérimentalement, on peut en tenir compte en traçant les points expérimentaux en fonction de  $I_B(1 - R)$ . Ce facteur est celui que l'on connaît pour des fermions ; cependant, son emploi dans le cadre d'un liquide de Luttinger n'a pas de justification théorique précise.

### 9.4.2 Transition entre le bruit thermique et le bruit de grenaille

Le dernier aspect qu'il reste à vérifier est que l'on passe continuellement du bruit thermique au bruit de grenaille. En effet, la tension à laquelle le cross-over se produit donne une indication de la charge des porteurs.

La figure 9.15 représente le bruit en courant en fonction du courant de rétrodiffusion, à une température de  $134mK$ . La résistance différentielle vaut  $0.26e^2/h$ , et la tension appliquée varie entre  $13\mu V$  et  $140\mu V$ . À faible tension, on voit une saturation du bruit, tandis qu'à forte tension, on retrouve une variation linéaire, avec une pente qui correspond à celle attendue pour les quasiparticules de Laughlin. La flèche indique le point expérimental pour lequel  $e^*V_{ds} = 2k_B\theta$  : celui-ci se trouve bien dans la région de transition entre les deux régimes.

À partir des données expérimentales, nous avons obtenu un fit polynomial de la loi  $V_{ds}(I_B)$ . Cette loi empirique a ensuite été introduite dans la formule 8.1 :

$$S_{I_B} = 2e^*I_B \coth \left[ \frac{e^*V_{ds}(I_B)}{2k_B\theta} \right]$$

On obtient alors la courbe en tirets, dont l'origine (bruit à courant nul) a été fixée arbitrairement. L'accord avec les points expérimentaux est excellent, et en particulier la transition entre le bruit d'équilibre et le bruit de grenaille [140]. À titre de comparaison, la courbe en pointillés est celle attendue pour des électrons : cross-over à  $eV_{ds} = k_B\theta$  et loi asymptotique en  $S_{I_B} = 2eI_B$ .

Cette dernière expérience nous permet donc de confirmer les mesures faites à basse température : les quasiparticules de Laughlin ont une charge  $e/3$ , ce dont on trouve une signature non seulement dans la variation du bruit de grenaille avec le courant, mais aussi dans le cross-over entre le bruit thermique et le bruit de grenaille.

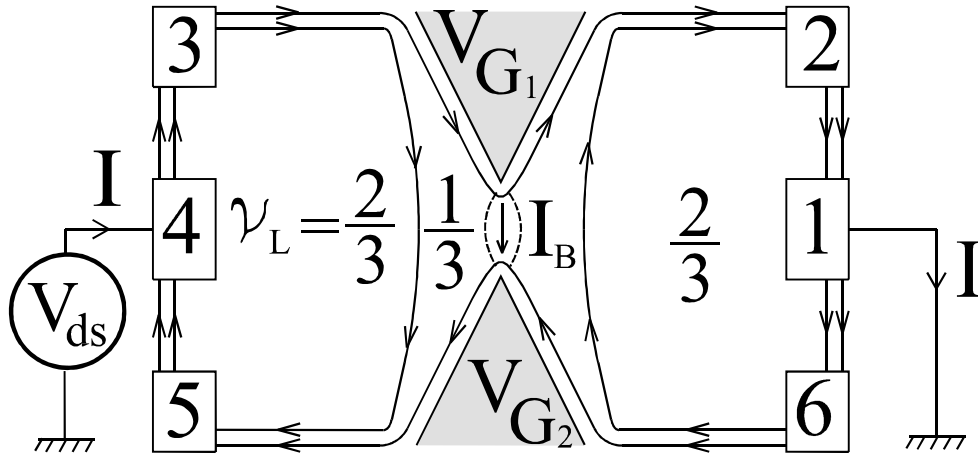


FIG. 9.1 – Schéma de principe de notre expérience : l'échantillon est en régime d'effet Hall quantique fractionnaire sur le plateau  $\nu = 2/3$ , puis le point-contact est déplété jusqu'à  $\nu = 1/3$ . On induit une rétrodiffusion de quasiparticules à l'aide du point-contact, et on mesure le bruit en fonction de la tension drain-source.

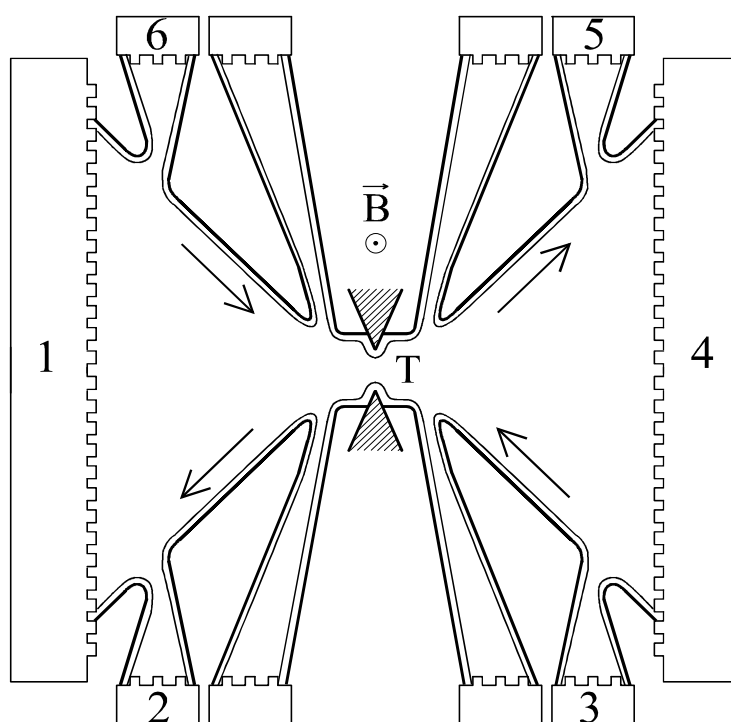


FIG. 9.2 – Schéma du méso : les fils s'élargissent en forme de papillon pour réduire la rétrodiffusion. Les contacts ohmiques sont en forme de crêteaux, afin d'augmenter leur périmètre et donc de réduire leur résistance. Les flèches indiquent le sens de circulation des états de bord. Les contacts non numérotés ne sont pas utilisés, et ne sont donc pas connectés.

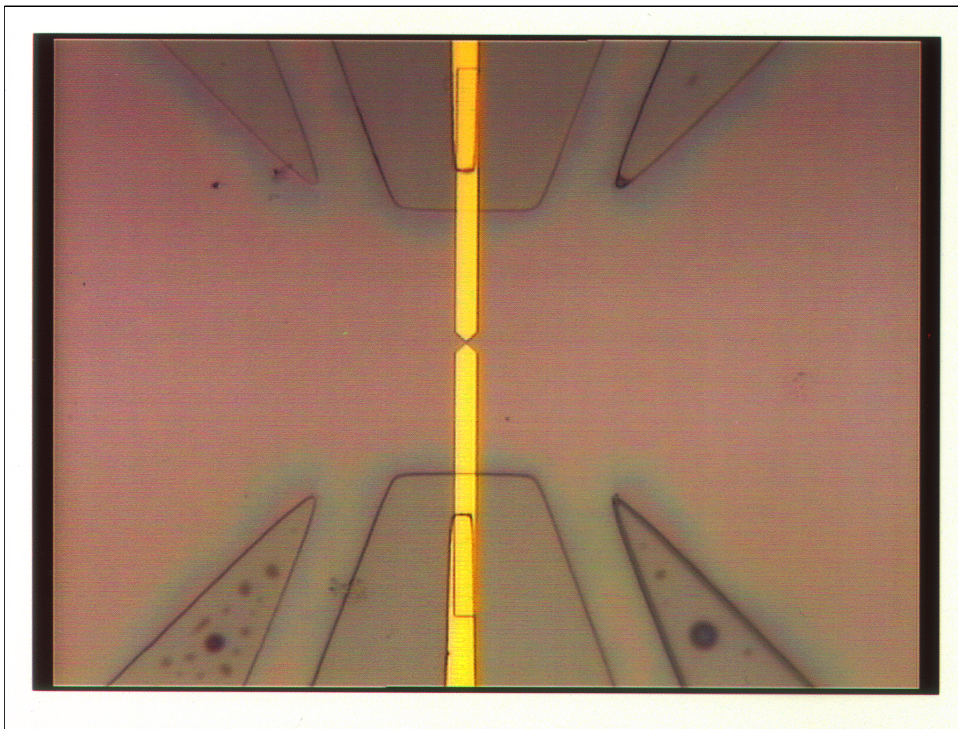


FIG. 9.3 – Photographie prise au microscope optique d'un échantillon. On voit la partie centrale du méso, et les grilles en or du contact ponctuel quantique. Les taches noires sont des restes de résine. À ce grossissement, on ne voit pas les contacts ohmiques.

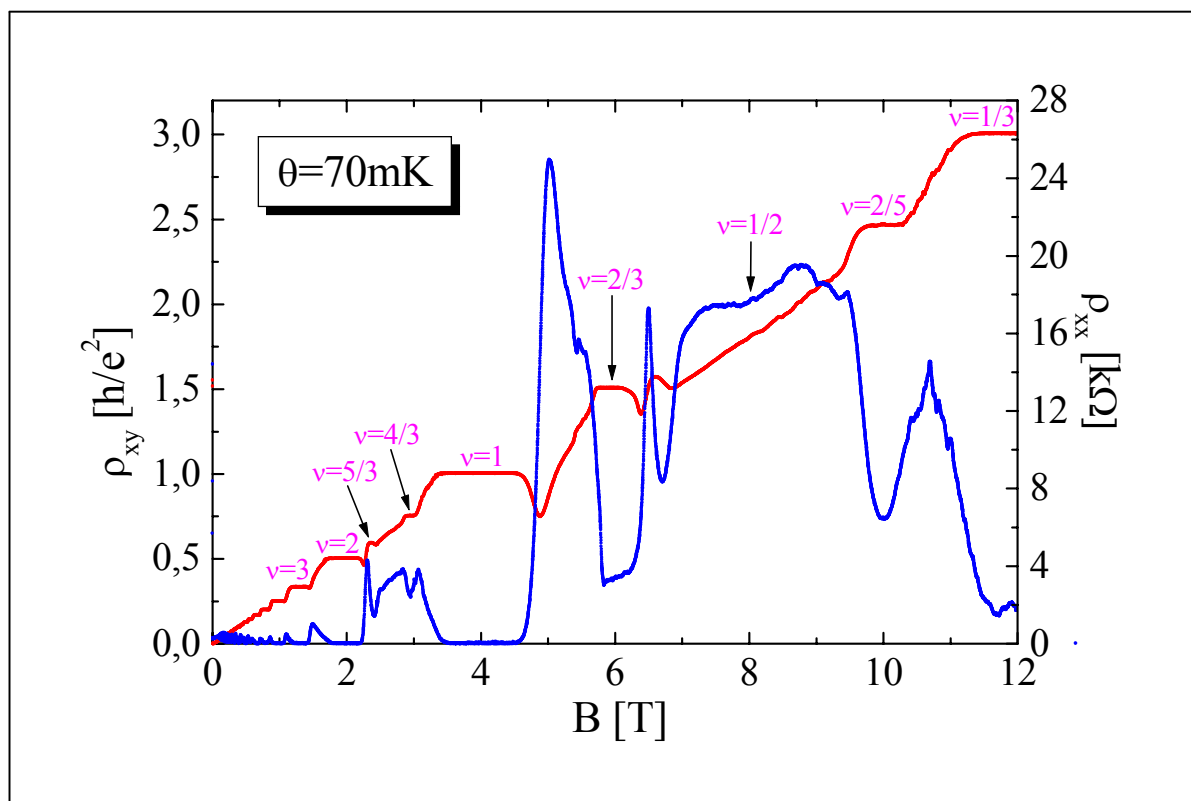


FIG. 9.4 – Résistance Hall et longitudinale en fonction du champ magnétique. La température est de  $70 \text{ mK}$ . On voit un effet Shubnikov-de Haas prononcé, et les plateaux Hall quantifiés. Les fractions sont très marquées, aussi bien sur la résistance Hall que longitudinale. Ceci indique que l'échantillon est très peu désordonné.



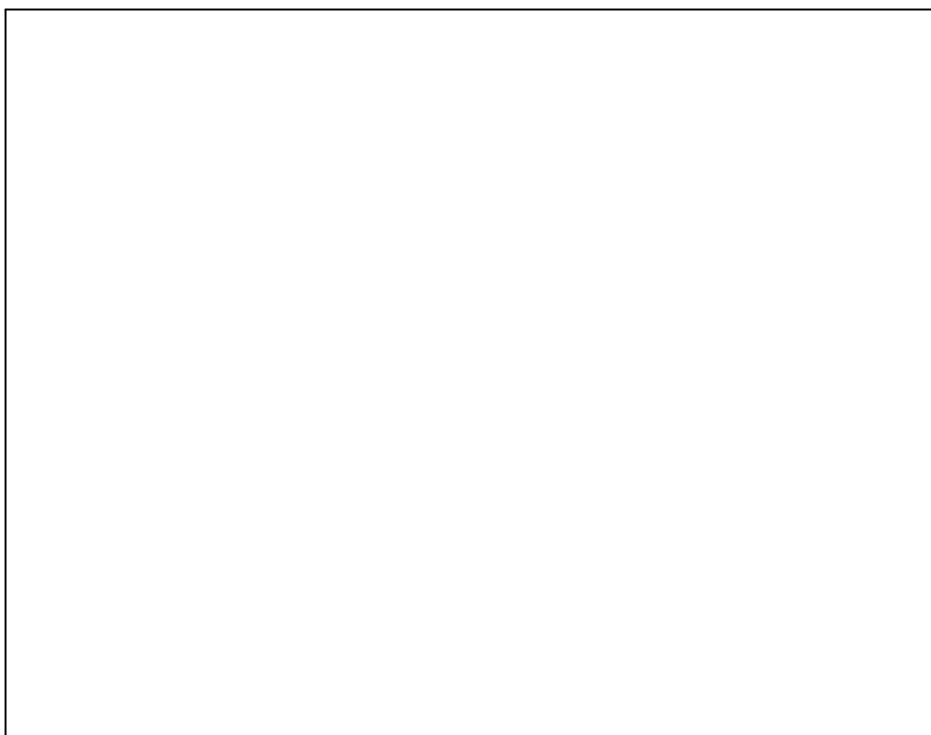


FIG. 9.5 – Dépletion du point contact à partir de  $\nu = 2/3$ , à  $25mK$ . Les oscillations sont dues au désordre : on voit des résonances en fonction de la tension de grille, qui disparaissent lorsqu'on applique une tension. Ce comportement est typique des liquides de Luttinger. De plus, on voit une résonance parfaite : on passe d'une rétrodiffusion complète ( $G_{diff} = 0$ ) à la valeur quantifiée ( $G_{diff} = e^2/3h$ ).

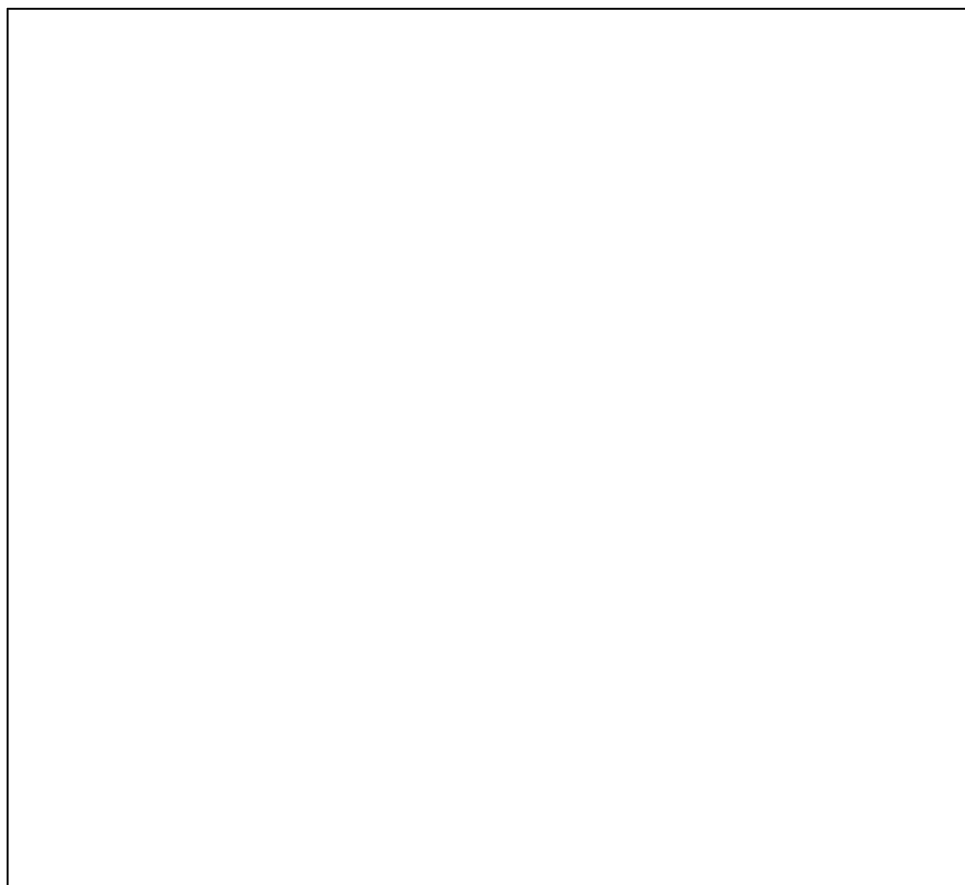


FIG. 9.6 – Détail de la résonance parfaite de la figure 9.5. Les courbes sont prises à différentes tensions drain-source. On voit que l'application d'une tension réduit la rétrodiffusion, en accord qualitatif avec les modèles de liquides de Luttinger. Les chemins  $A$ ,  $B$  et  $C$  indiquent les résistances différentielles auxquelles nous avons effectué nos mesures de bruit.

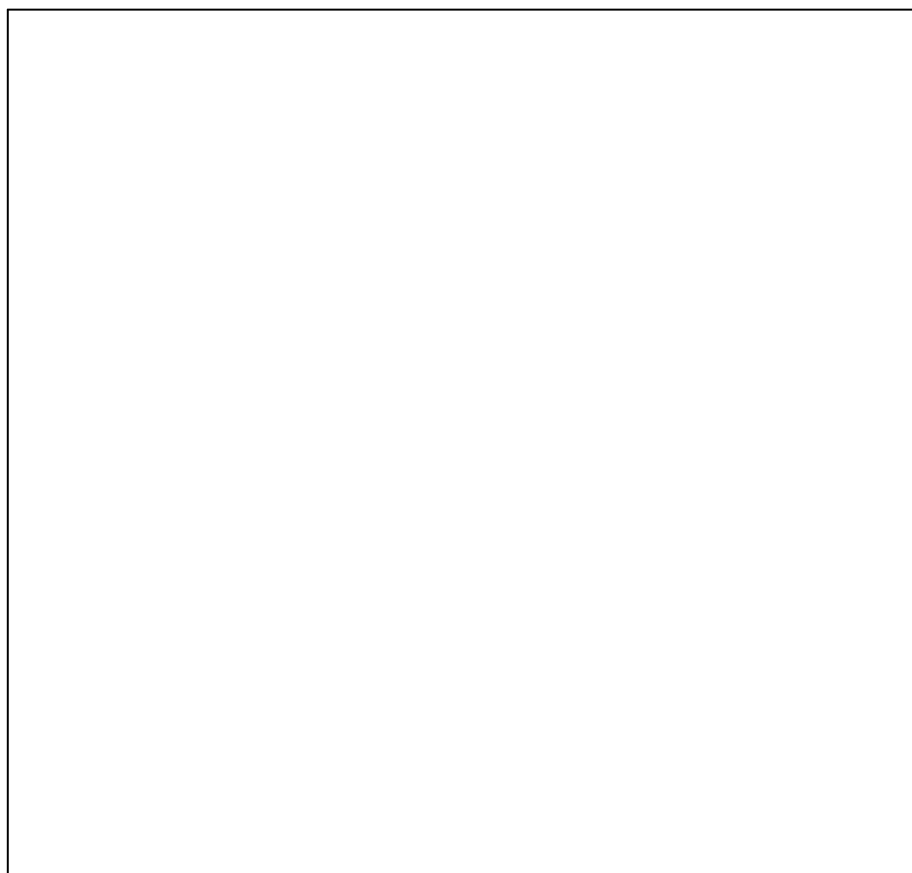


FIG. 9.7 – Résistance différentielle en fonction de la tension drain-source, à différentes tensions de grilles régulièrement espacées entre  $-171mV$  (sommet de la résonance) et  $-183mV$  (bas de la résonance). Les courbes sont prises à  $25mK$ . Comme attendu, la rétrodiffusion diminue avec la tension, puis augmente à nouveau.

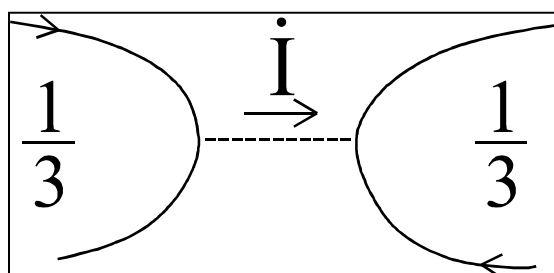


FIG. 9.8 – Régime de forte rétrodiffusion. Ce sont des électrons qui tunnelent vers l'avant. L'application d'une tension augmente ce tunneling, ce qui augmente la conductance.

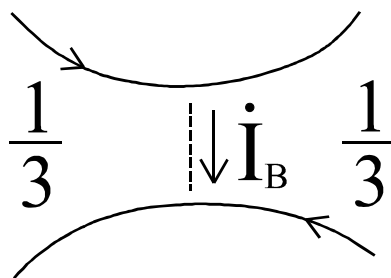


FIG. 9.9 – À forte tension, il devient possible de faire tunneler des quasiparticules de Laughlin d'un canal de bord à l'autre, ce qui diminue le courant. En augmentant la tension, on diminue la conductance, mais cette fois à cause de ce tunneling de quasiparticules.

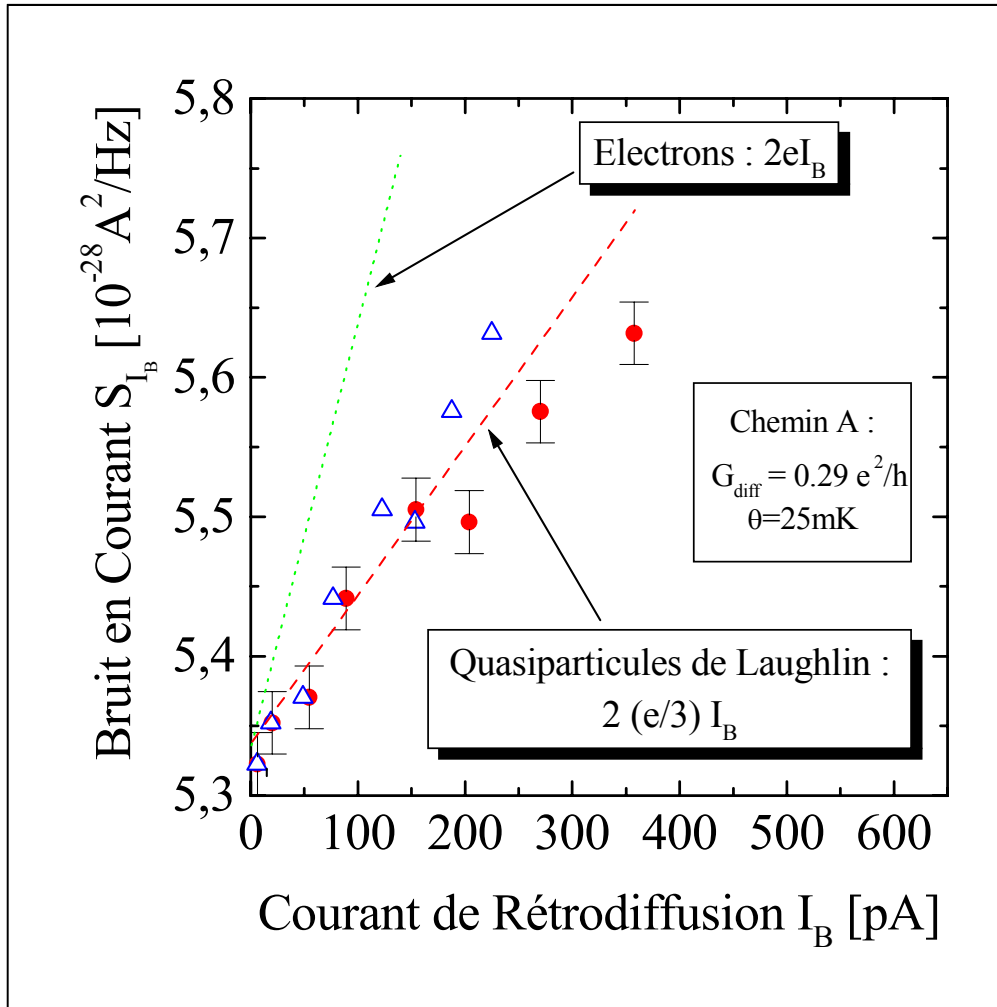


FIG. 9.10 – Bruit en courant en fonction du courant de rétrodiffusion. La courbe en pointillés représente le bruit attendu pour des électrons. La courbe en tirets représente le bruit attendu pour des quasiparticules de Laughlin. Les triangles représentent les mêmes données, mais en fonction de  $I_B (1 - R)$ .

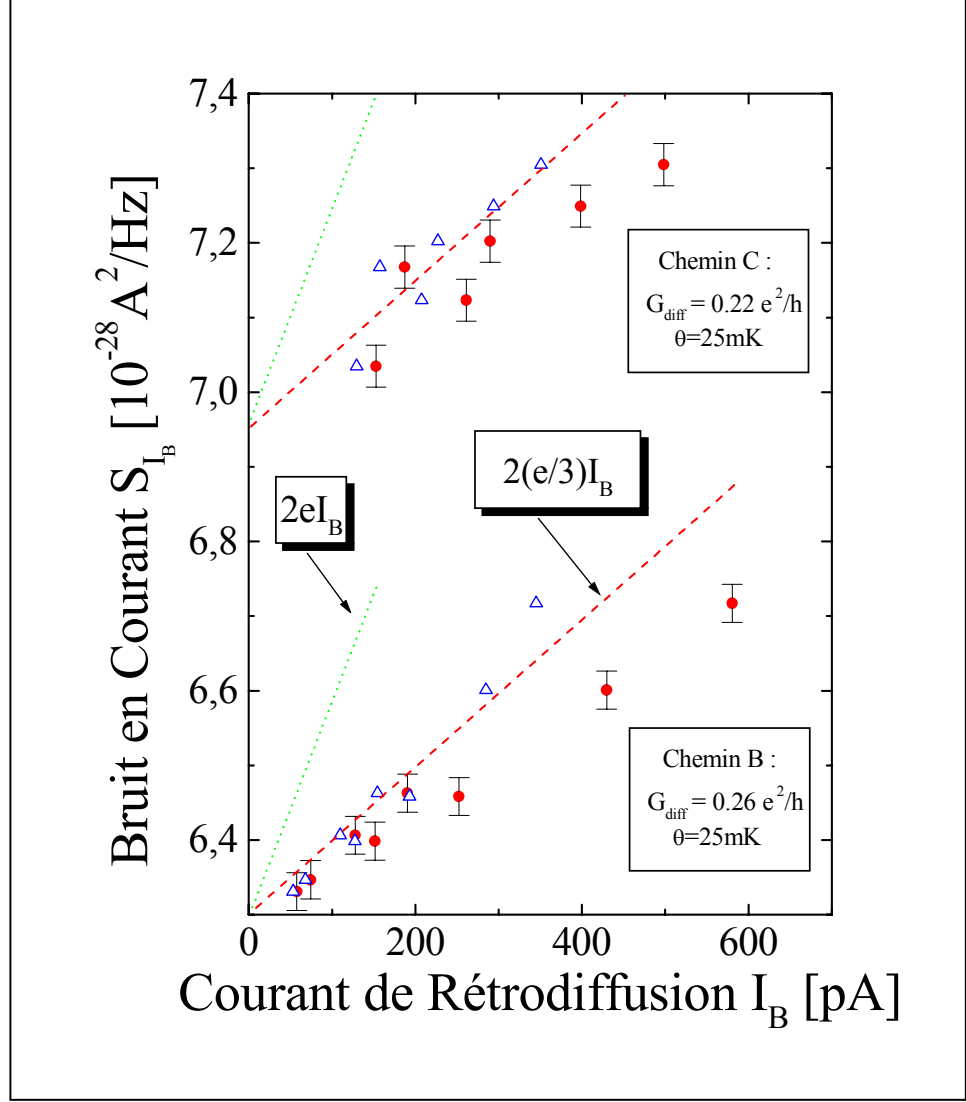


FIG. 9.11 – Bruit en courant en fonction du courant de rétrodiffusion, pour deux autres valeurs de la résistance différentielle,  $G_{\text{diff}} = 0.22e^2/h$  et  $G_{\text{diff}} = 0.26e^2/h$ , correspondant aux chemins *B* et *C* sur la figure 9.6. On voit que, compte tenu de l'incertitude expérimentale, on trouve bien le bruit attendu pour du tunneling de quasiparticules (droite en tirets).

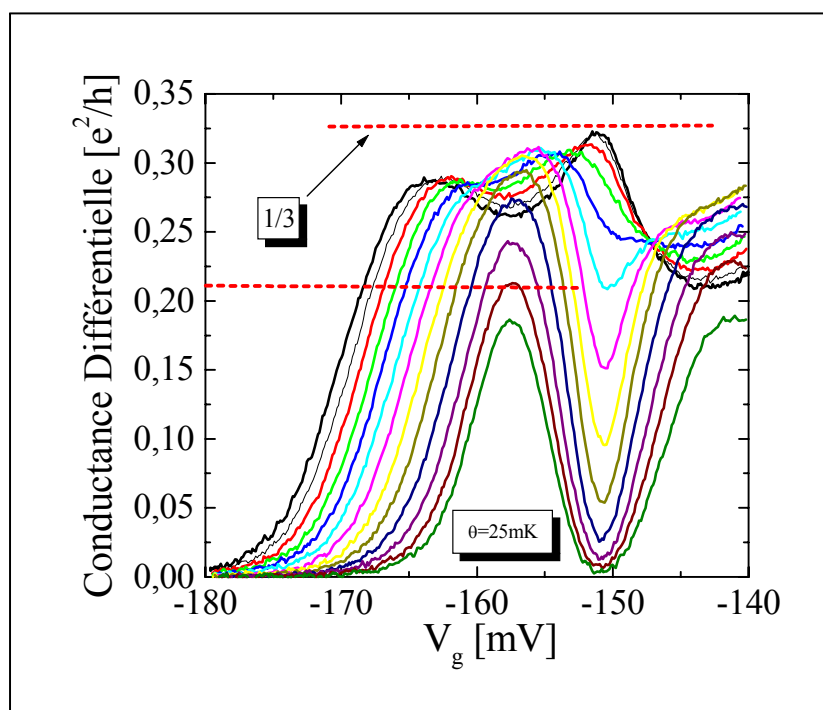


FIG. 9.12 – Résistance différentielle en fonction de la tension de grille, avant que l'on ait dissymétrisé les tensions appliquées sur les deux grilles du point-contact pour obtenir une résonance parfaite. La droite en tirets indique le chemin suivi pour mesurer le bruit.

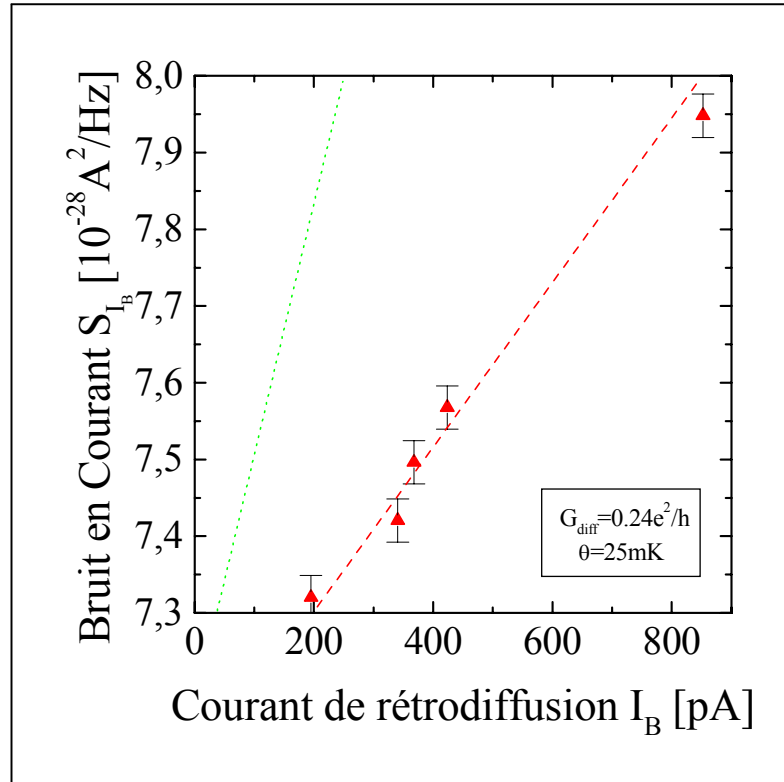


FIG. 9.13 – Bruit en fonction du courant de rétrodiffusion pour une résonance désaccordée. La conductance différentielle vaut  $G_{\text{diff}} = 0.24e^2/h$ , la température est de  $25\text{mK}$ . La droite en tirets représente le bruit attendu pour des quasiparticules de Laughlin.



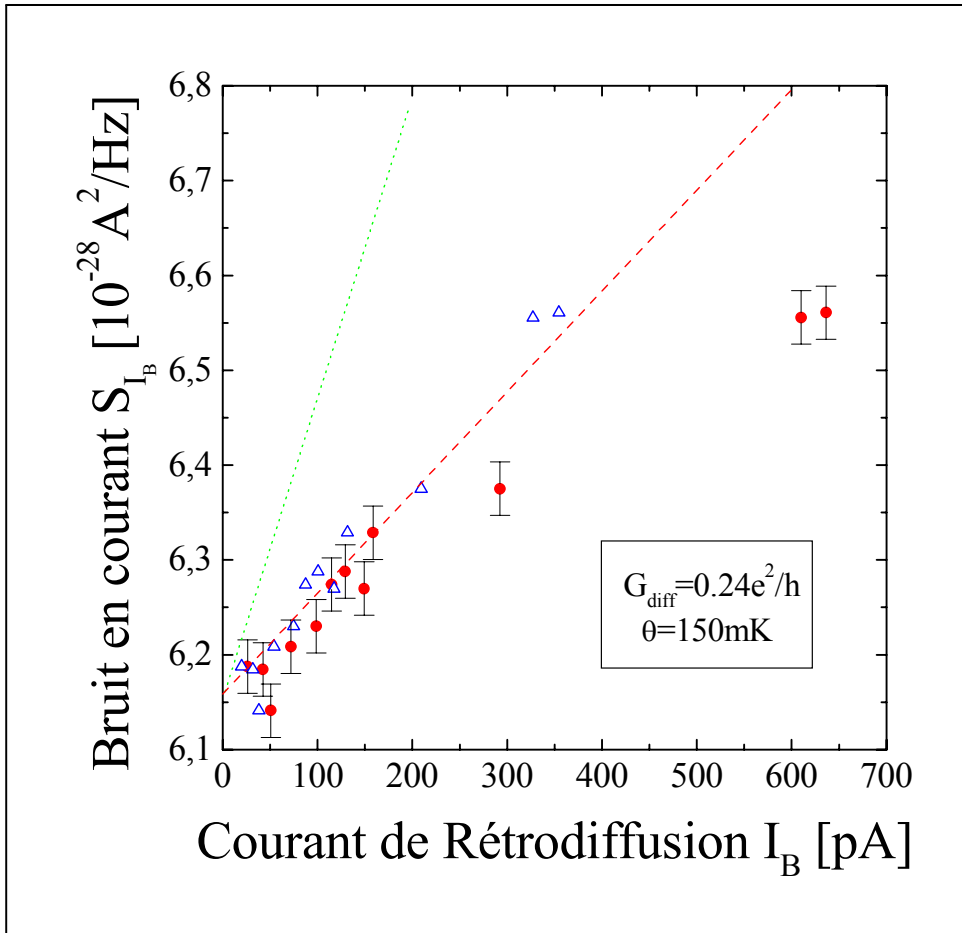


FIG. 9.14 – Bruit en courant en fonction du courant de rétrodiffusion, pour une résistance différentielle  $G_{\text{diff}} = 0.24e^2/h$ , et à une température  $\theta = 150\text{mK}$ . Les points expérimentaux suivent toujours le bruit attendu pour des quasiparticules de charge  $e/3$ , et les déviations observées lorsque le taux de réflexion augmente peuvent être prises en compte simplement par le facteur  $(1 - R)$  (triangles).

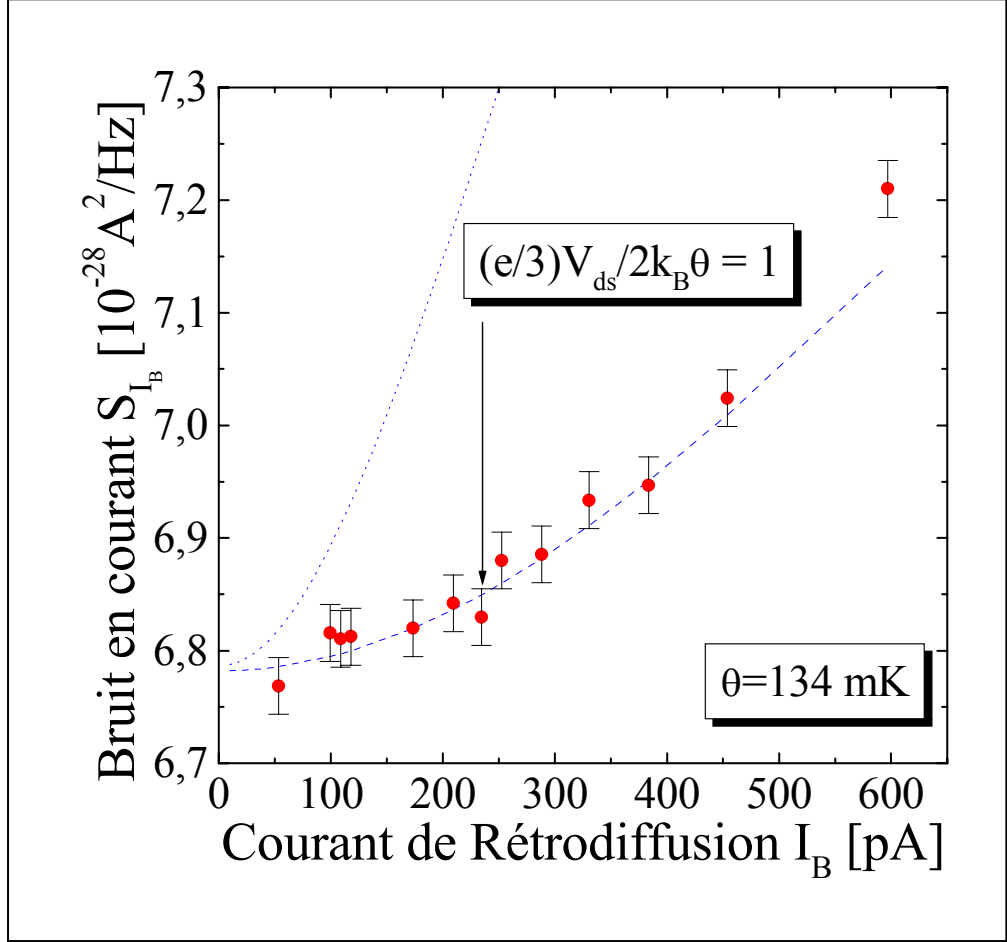


FIG. 9.15 – Bruit en fonction du courant, pour une conductance différentielle de  $0.26e^2/h$ , et à une température de  $134 \text{ mK}$ . Le bruit est indépendant du courant tant que  $e^*V_{ds} \lesssim 2k_B\theta$ . À forte tension, on retrouve le Shot-Noise, linéaire en courant. La courbe en tirets correspond à la formule 8.1 pour le bruit des quasiparticules, la courbe en pointillés au bruit attendu pour des électrons.

# Conclusion

L'effet Hall quantique fractionnaire est un état collectif du gaz d'électrons bidimensionnel en champ magnétique, qui recèle de nombreuses propriétés remarquables : la résistance Hall est quantifiée à une valeur qui ne fait intervenir que des constantes fondamentales de la physique, et la résistance longitudinale est nulle. Mais ces propriétés ne sont liées qu'à la nature de l'état fondamental, et en particulier à l'incompressibilité du liquide d'électrons.

Plus surprenant, les excitations élémentaires du système, ou quasiparticules, ont une charge fractionnaire,  $e^* = e/3$  sur le plateau Hall  $\nu = 1/3$ . S'il existe d'autres modèles théoriques en physique des solides où les excitations élémentaires sont fractionnaires [144], aucune observation expérimentale n'avait été rapportée jusqu'alors.

En utilisant le bruit de grenaille associé avec le tunneling de ces quasiparticules, nous avons montré sans ambiguïté, que la charge de ces excitations vaut  $e/3$  [140, 141]. Nous avons pour cela utilisé deux propriétés du bruit de grenaille :

- La variation du bruit avec le courant vaut  $S_{I_B} = 2e^*I_B = 2(e/3)I_B$  dans la limite poissonnienne, quand la tension est très supérieure à la température
- À température finie, le cross-over entre le bruit thermique et le bruit de grenaille se produit à  $e^*V_{ds} = 2k_B\theta$

Ces faits expérimentaux sont robustes lorsqu'on change la configuration de tunneling ou la température.

Quand le taux de réflexion augmente, on s'écarte de l'hypothèse de bruit poissonnien : les déviations observées sont bien prises en compte en traçant les courbes en fonction de  $I_B(1 - R)$ . Ce facteur de correction est celui attendu pour des fermions [76] ; il n'y a pas de calcul théorique analytique permettant de donner l'équivalent de ce facteur pour des quasiparticules de Laughlin. Le terme  $(1 - R)$  reste donc un fait expérimental à confirmer, valable au moins tant que  $R$  n'est pas trop grand.

Notre expérience a mis en évidence pour la première fois des quasiparti-

cules de charge fractionnaire. Il reste maintenant à explorer le domaine où le taux de réflexion est fort, ainsi que les lois de dépendance du courant en fonction de la tension. Ces deux aspects sont intimement reliés aux modèles de liquides de Luttinger, pour lesquels des réalisations expérimentales convaincantes manquent encore.

## Quatrième partie

### Bruit en charge extrinsèque d'une boîte quantique



# Introduction

Cette partie de notre travail de thèse s’inscrit dans le cadre d’un projet européen “ ESPRIT ” portant sur les transistors à un électron (SET pour Single Electron Transistor). Il s’agissait de cerner, d’un point de vue fondamental, les principaux obstacles à l’utilisation des boîtes quantiques pour des applications “ industrielles ”. Plusieurs laboratoires étaient impliqués dans ce projet (le PTB en Allemagne, l’Université de Glasgow, l’Université de Delft...). Le point sur lequel nous nous sommes concentrés concerne le bruit en charge de ces systèmes à basse fréquence. En effet, comme nous le verrons, il existe des charges qui se déplacent de façon aléatoire sur le substrat et qui peuvent être très gênantes si on veut utiliser ces SET pour des applications en logique.

Il peut paraître étonnant d’envisager des applications lorsque l’on parle de systèmes mésoscopiques : la température est un obstacle rédhibitoire à toute application “ grand public ”, et la physique mésoscopique était jusqu’à récemment l’apanage des laboratoires disposant de très basses températures. Cependant, les boîtes quantiques sont un cas particulier ; en effet, la question de la température est principalement liée à l’énergie de charge. Or, cette énergie de charge varie linéairement avec la taille caractéristique du système. Autrement dit, une loi d’échelle simple permet de voir qu’une boîte quantique de  $10nm$  a une énergie de charge de l’ordre du millier de Kelvins [145, 146].

Évidemment, une telle résolution est difficilement envisageable avec des techniques de lithographie [147]. Cependant, des boîtes quantiques “ naturelles ” se forment dans certains matériaux à condition de bien contrôler leur croissance : c’est ce que l’on appelle la croissance “ auto-organisée ”. Ces boîtes quantiques ont typiquement une taille de  $10nm$  [21, 22], et fonctionnent donc à température ambiante. De plus, si on regarde de plus près les échelles d’énergie mises en jeu, et si on les compare à la température, on s’aperçoit que l’on a à peu près le même rapport entre la température et les différentes énergies caractéristiques dans nos boîtes quantiques à  $100mK$  et dans ces petites boîtes de  $10nm$  à  $300K$ .

Les études de physique fondamentale que nous menons ne sont donc

pas si éloignées des applications potentielles : nos boîtes quantiques sont au contraire des systèmes-modèle pour comprendre la physique mise en jeu à température ambiante. En particulier, la technique de la “ grille fendue ” permet de moduler à volonté la forme du gaz d’électrons, la taille des boîtes, la transmission des barrières... Il s’agit donc d’une sorte de “ maquette ” dont on peut faire varier les paramètres *in situ*, et qui permet de prévoir le comportement futur d’éventuels composants.

Dans cette partie, nous décrirons brièvement le blocage de Coulomb, puis nous expliquerons le principe d’utilisation d’une boîte quantique en électromètre ; ensuite, nous verrons les principales sources de bruit en charge dans un électromètre à blocage de Coulomb, et nous donnerons finalement les résultats de nos mesures de ce bruit en charge.

Les boîtes quantiques ont été étudiées en détail par beaucoup d’autres auteurs [30, 39, 148, 149, 150] ; aussi nous ne décrirons leurs propriétés physiques que brièvement et dans les grandes lignes. Il s’agit uniquement de permettre de comprendre le principe de l’électromètre à blocage de Coulomb, et les limitations fondamentales du système.



# Chapitre 10

## Transport à travers une boîte quantique

En utilisant la technique de la “ grille fendue ”, nous avons vu qu’il est possible de moduler à volonté la forme du gaz d’électrons bidimensionnel. En particulier, il est possible d’enfermer un petit nombre d’électrons dans une boîte, appelée “ boîte quantique ” [151]. Pour cela, il suffit, par exemple, de mettre deux Contacts Ponctuels Quantiques en série, et de fermer la boîte avec une troisième paire de grilles. C’est le procédé que nous avons utilisé ; la figure 4.2 représente une photographie prise au microscope électronique d’un de nos échantillons (pour nos expériences sur le bruit de grenaille décrites au chapitre 4, nous n’utilisons qu’un seul des deux points-contact, alors qu’ici, toutes les grilles sont polarisées). On isole alors un petit nombre d’électrons (typiquement un millier dans des boîtes comme les nôtres) du gaz d’électrons bidimensionnel.

Différentes énergies caractéristiques interviennent dans le système. La première est liée au fait que l’on a confiné les électrons : leur vecteur d’onde est donc quantifié dans les trois directions de l’espace, et il apparaît des niveaux d’énergie (niveaux à une particule) dans la boîte. Cette énergie est intrinsèque à la boîte, et apparaît dans tout système où l’on confine des particules. La deuxième énergie qui intervient est d’origine purement électrostatique : elle correspond au “ coût ” en énergie de l’ajout d’un électron dans la boîte. Enfin, il existe une troisième échelle d’énergie qui correspond à la largeur intrinsèque des niveaux de la boîte. Cette largeur des niveaux est reliée à la durée de vie d’un électron dans la boîte : en effet, si un électron dans la boîte restait indéfiniment dans le même état quantique, le niveau d’énergie correspondant à cet état serait infiniment fin [152]. Cependant, les barrières qui confinent le gaz d’électrons ont toujours une certaine transmission, et l’électron a donc une certaine probabilité de sortir. Ceci entraîne un élargissement

des niveaux, en général négligeable devant la température.

## 10.1 Différentes approches

On peut appréhender de différentes façons le problème des niveaux d'énergie dans une boîte quantique, en fonction de la taille de celle-ci. Si on considère de toutes petites boîtes, ne contenant que quelques électrons, il est nécessaire de calculer de façon microscopique les différents niveaux d'énergie dans la boîte à chaque fois que l'on ajoute un électron. Pour cela, on résout de façon auto-cohérente les équations de Schrödinger et de Poisson, à l'aide d'une fonction d'essai, en tenant compte de l'énergie électrostatique entre les électrons<sup>1</sup>, et éventuellement de l'énergie d'échange [153, 154, 155, 156, 157].

Les boîtes que nous avons utilisées ont un diamètre typique du micromètre, et contiennent environ un millier d'électrons. Elles peuvent donc, du point de vue électrostatique, être considérées comme macroscopiques : l'ajout, ou le retrait, d'un électron de la boîte, ne fait pas varier la capacité propre de celle-ci. Cette approche simplifie beaucoup tous les modèles de transport : on sépare les niveaux d'énergie à un électron, dus au confinement, et l'énergie de charge, qui ne dépend que de la capacité propre de la boîte<sup>2</sup>. C'est l'approche que nous adopterons dans la suite.

## 10.2 Énergies caractéristiques

### 10.2.1 Largeur des niveaux d'énergie de la boîte

Un niveau d'énergie de durée de vie infinie serait infiniment fin [152]. Cependant, dans une boîte réelle, différents processus peuvent limiter le temps de vie d'un état quantique : tout d'abord, les barrières ayant toujours une transmission finie, les électrons ont une certaine probabilité de sortir. Notons  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les probabilités de sortie d'un électron par les barrières 1 et 2. Ensuite, des processus inélastiques peuvent se produire dans la boîte : chocs sur des phonons, renversement du spin d'un électron... On note  $\Gamma_{in}$  la probabilité de perte de cohérence de phase par un de ces processus. Finalement, la largeur  $\hbar\Gamma$  d'un niveau vaut :

$$\hbar\Gamma = \hbar(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_{in})$$

---

<sup>1</sup>Cette approche est nécessaire, par exemple, si on s'intéresse aux dispositifs de toute petite taille [21, 22] fonctionnant à température ambiante.

<sup>2</sup>On néglige la largeur intrinsèque des niveaux, qui, dans nos échantillons, est toujours plus petite que la température.

Généralement, et c'est le cas dans nos expériences, cette énergie est plus petite que la température, et n'intervient donc pas dans la conduction.

### 10.2.2 Espacement des niveaux

L'énergie d'un électron dans la boîte varie comme  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ . Si les électrons sont confinés dans les trois directions de l'espace, le vecteur d'onde est quantifié et varie comme  $1/L$ , où  $L$  est la dimension caractéristique du système. L'espacement entre niveau  $\Delta E$  de la boîte varie donc comme  $1/L^2$ .

### 10.2.3 Énergie de charge

L'énergie de charge est reliée à l'inverse de la capacité propre de la boîte  $C$ , comme nous le verrons au paragraphe suivant. La capacité est elle proportionnelle à la dimension caractéristique de système  $L$ . L'énergie de charge  $E_C$  varie donc comme  $1/L$ .

Ces différentes énergies interviennent dans le calcul exact de la conductance. Cependant, le point principal à noter est que le rapport  $\Delta E/E_C$  varie comme  $1/L$ . Lorsqu'on diminue la taille du système, l'espacement entre niveaux varie donc plus vite que l'énergie de charge. Autrement dit, des systèmes semiconducteurs de petite taille, qui fonctionneraient à température ambiante, ne seraient pas dans le régime métallique ( $\Delta E \ll k_B \theta$ ), mais bien dans le régime quantique<sup>3</sup> ( $\Delta E \succeq k_B \theta$ ). Les études fondamentales que nous menons sont donc tout à fait pertinentes : dans un premier temps, il est plus simple de travailler à basse température avec des  $\Delta E$  faibles, sur des systèmes réalisés par lithographie, et donc très contrôlables ; mais les résultats obtenus restent valables pour des systèmes plus petits à température ambiante.

## 10.3 Blocage de Coulomb et oscillations de conductance

### 10.3.1 Principe du blocage de Coulomb

Le blocage de Coulomb est basé sur l'énergie de charge, c'est à dire l'énergie nécessaire pour ajouter ou retirer un électron de la boîte. Considérons un

---

<sup>3</sup>On obtient ce résultat en faisant une loi d'échelle triviale entre nos boîtes (diamètre de  $1\mu m$ , énergie de charge de  $2K$ , et espacement entre niveaux de  $100mK$ ), et des systèmes équivalents de  $10nm$ .

îlot métallique isolé du gaz d'électrons par des barrières-tunnel, de capacité propre  $C$ . L'énergie pour ajouter un électron vaut alors :

$$E_C = \int_0^{-e} U(q) dq = \int_0^{-e} \frac{q}{C} dq = \frac{e^2}{2C}$$

C'est cette énergie que l'on appelle " énergie de charge ". Précisons que cette énergie n'est pas une énergie intrinsèque de la boîte : elle n'apparaît que dans le spectre d'*addition*, c'est à dire lorsque l'on veut changer le nombre d'électrons dans la boîte.

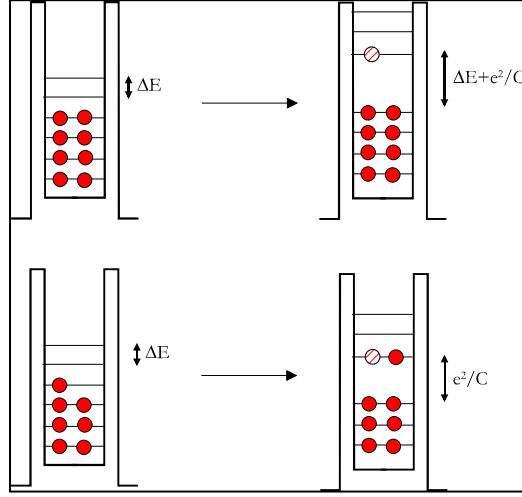


FIG. 10.1 – Principe du blocage de Coulomb : l'ajout d'un électron (en tirets) dans la boîte entraîne une augmentation de l'énergie propre de celle-ci de  $e^2/C$ . En haut, le dernier niveau est occupé par deux électrons ; le coût en énergie de l'ajout d'un nouvel électron est alors  $e^2/C + \Delta E$ . En bas, le dernier niveau n'est occupé que par un électron ; le gap pour l'ajout d'un nouvel électron n'est plus que  $e^2/C$ . Il y a donc une sorte de levée de dégénérescence.

En conséquence, il est impossible de faire passer du courant dans la structure : tant que  $E_C \ll k_B \theta$  : il n'y a aucun niveau dans la boîte accessible pour l'électron (cf. figure 10.2). La conduction à travers la boîte est donc bloquée ; c'est le *blocage de Coulomb*.

Supposons que l'on ajoute, en regard de la boîte, une autre grille, avec une capacité vers la boîte  $C_g$  (concrètement, il s'agit de la grille centrale sur la figure 4.2). Un potentiel  $V_g$  appliqué à cette grille induit dans la boîte une charge  $C_g V_g$ , et une variation du potentiel de la boîte  $C_g V_g / C$ . L'énergie

électrostatique d'une boîte contenant  $N$  électrons vaut donc :

$$W_C(N) = \int_0^{-Ne} U(q) dq = \int_0^{-Ne} \left( \frac{q}{C} + \frac{C_g}{C} V_g \right) dq = \frac{(Ne)^2}{2C} - Ne \frac{C_g}{C} V_g$$

Pour qu'un électron puisse rentrer dans la boîte, il faut que son énergie  $E_F$  soit égale à l'énergie d'un niveau de la boîte plus la différence d'énergie électrostatique entre les états à  $N$  et  $N + 1$  électrons dans la boîte (cf. figure 10.2) :

$$\begin{aligned} E_F &= E_{N+1} + W_C(N+1) - W_C(N) \\ &= E_{N+1} + \frac{e^2}{C} \left( N + \frac{1}{2} - \frac{C_g V_g}{e} \right) \end{aligned}$$

En faisant varier la tension de grille, on peut satisfaire à cette condition pour un nombre  $N$  arbitraire d'électrons dans la boîte. On fait donc alterner des situations où la conduction est bloquée, et des situations où le système est passant : on a des oscillations de conductance lorsque l'on balaye la grille [39]. À chaque pic de conductance correspond l'ajout d'un électron dans la boîte ; le blocage de Coulomb permet donc de *compter les électrons un par un*.

Un autre point important concerne le spin : lorsqu'un niveau n'est occupé que par un seul électron (cf. figure 10.2), il n'y a que l'énergie de charge à "payer" (on peut mettre deux électrons de spins opposés sur chaque niveau). Par contre, lorsqu'un niveau est occupé par deux électrons, il faut "payer" à la fois l'énergie de charge et l'espacement entre niveaux pour trouver un état libre. Les pics de conductance sont espacés alternativement de  $e^2/C$  et de  $\frac{e^2}{C} + \Delta E$ . Le blocage de Coulomb permet donc d'observer une sorte de levée de dégénérescence de spin. L'intérêt d'un tel système pour l'électrométrie est évident : nous avons vu qu'entre deux pics de conductance, il y a exactement un électron de plus dans la boîte. Il est donc possible de détecter des variations de l'état de charge de la boîte avec une sensibilité bien meilleure que l'électron.

### 10.3.2 Conductance d'une boîte quantique

Dans nos boîtes quantiques de  $1.1\mu m$ , réalisées sur un gaz d'électrons bidimensionnel de densité  $10^{11} e/cm^2$ , l'énergie de charge  $e^2/C$  vaut  $2.8K$ , et l'espacement entre niveaux  $\Delta E$  vaut  $100mK$ . Nos expériences sont menées entre  $30mK$  et  $500mK$ , c'est à dire dans le régime quantique tant que  $k_B\theta \preceq \Delta E \ll e^2/C$ , et dans le régime classique<sup>4</sup> quand  $\Delta E \leq k_B\theta \ll e^2/C$ .

---

<sup>4</sup>On distingue le régime quantique, quand la température est inférieure à l'espacement entre niveaux  $\Delta E$ , et le régime classique quand elle lui est supérieure. En effet,  $\Delta E$ , lié au

Dans ce paragraphe, nous allons adopter le modèle séquentiel pour calculer la conductance. Cette approche traite les événements-tunnel (entrée et sortie des électrons) de façon séquentielle, en incluant l'interaction électrostatique (énergie de charge) dans la conservation de l'énergie. L'Hamiltonien du système (les deux réservoirs et la boîte) en l'absence de couplage-tunnel s'écrit :

$$H_0 = \sum_{k_L} \varepsilon_{k_L} a_{k_L}^+ a_{k_L} + \sum_{k_R} \varepsilon_{k_R} b_{k_R}^+ b_{k_R} + \sum_{k_D} \varepsilon_{k_D} c_{k_D}^+ c_{k_D}$$

les indices  $L$ ,  $R$  et  $D$  désignant respectivement les réservoirs de gauche et de droite, et la boîte.

Les processus-tunnel sont décrits par l'Hamiltonien-tunnel :

$$H_T = \sum_{k_L, k_D} (t_{k_L, k_D}^L c_{k_D}^+ a_{k_L} + C.C.) + \sum_{k_R, k_D} (t_{k_R, k_D}^R c_{k_D}^+ b_{k_R} + C.C.)$$

L'Hamiltonien total prend la forme :

$$H = H_0 + H_T$$

Dans la limite des faibles couplages, on peut traiter l'Hamiltonien-tunnel comme une perturbation. La probabilité de transition, entre un état  $j$  du réservoir et un état  $p$  de la boîte est donnée par la règle d'or de Fermi [152] :

$$\Gamma_p = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle p | H_T | j \rangle|^2 \delta((\varepsilon_p + W(N+1) - W(N)) - \varepsilon_j)$$

On voit que l'énergie de Coulomb intervient dans la fonction  $\delta$  qui représente la conservation de l'énergie. On obtient des relations équivalentes pour les autres événements-tunnel.

À partir de là, on peut faire un calcul exact de la conductance, en écrivant le bilan des probabilités d'entrée et de sortie des électrons vers les réservoirs de droite ou de gauche, dans le régime quantique ou classique [39, 150]. Cette équation maîtresse donne le courant, et donc la conductance.

### Régime quantique : $k_B \theta \preceq \Delta E$

Dans ce régime, l'électron ne passe que par un niveau (cf. figure 10.3). En notant  $T_1$  et  $T_2$  les transmissions des deux barrières-tunnel, on obtient pour

---

confinement, est d'origine quantique, alors que l'énergie de charge, seule énergie pertinente dans le cas classique, est d'origine purement classique (électrostatique). Dans les systèmes métalliques, la densité étant beaucoup plus grande, l'espacement entre niveaux est toujours négligeable devant la température : on ne peut alors avoir accès qu'au régime classique.

la conductance :

$$G = \frac{1}{4} \frac{\Delta E}{k_B \theta} \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{E_{N+1} + W(N+1) - W(N) - E_F}{2k_B \theta} \right)} \left[ \frac{e^2}{h} \right]$$

La conductance varie donc comme l'inverse de la température. Ceci peut se comprendre simplement : le nombre d'électrons susceptibles de participer à la conduction est proportionnel à la dérivée de la fonction de Fermi, qui varie comme l'inverse de la température :

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{k_B \theta} \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{E}{k_B \theta} \right)}$$

Dans ce régime, il n'y a qu'un seul état de la boîte qui participe à la conduction. Lorsque l'on balaye la tension de grille, on sonde donc la transmission de chaque état, qui peut varier en fonction de son couplage-tunnel avec les réservoirs : la hauteur des pics de conductance est irrégulière en fonction de la tension de grille [158].

**Régime classique :**  $\Delta E \preceq k_B \theta \ll e^2/C$

Dans ce régime, les niveaux d'énergie de la boîte ne sont plus résolus : les états apparaissent comme un continuum (cf. figure 10.3). C'est le régime par excellence des systèmes métalliques [159], qui se différencient des semiconducteurs par leur très grande densité électronique. La conductance s'exprime par :

$$G = \frac{1}{2} \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \frac{\frac{E_{N+1} + W(N+1) - W(N) - E_F}{2k_B \theta}}{\sinh \left( \frac{E_{N+1} + W(N+1) - W(N) - E_F}{2k_B \theta} \right)} \left[ \frac{e^2}{h} \right]$$

La hauteur des pics est maintenant indépendante de la température. Dans ce cas, le nombre d'électrons participant à la conduction est comme précédemment proportionnel à l'inverse de la température, mais le nombre de niveaux par lesquels les électrons “ tunnelent ” est lui proportionnel à la température. En conséquence, la hauteur des pics est indépendante de la température [158].

L'élargissement thermique a un autre effet : il moyenne les transmissions de plusieurs niveaux ; contrairement au cas précédent, on ne mesure que la transmission moyenne des niveaux, qui varie de façon monotone avec la tension de grille.

Le maximum de conductance vaut  $\frac{1}{2} \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ , c'est à dire la moitié de la conductance-série des deux barrières. De façon intuitive, on peut dire que

l'énergie de charge empêche un deuxième électron de rentrer tant que le premier n'est pas ressorti de la boîte : le système n'est donc passant que la moitié du temps, d'où le facteur  $1/2$ .

### Minima de conductance

Si l'on néglige des processus du second ordre comme le cotunneling [149, 160, 161], la conductance sur les minima est un processus activé. On trouve alors :

$$G = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} e^{-\frac{\Delta E + e^2/C}{2k_B \theta}}$$

On voit que quand la température augmente, les minima de conductance augmentent exponentiellement ; à la limite, quand  $2k_B \theta \gg e^2/C$ , on a totalement levé le blocage de Coulomb, et on retrouve la conductance-série des deux barrières.

## 10.4 Mesure des oscillations de conductance

L'échantillon que nous avons utilisé est représenté sur la figure 4.2 : les deux points-contact sont placés dans le régime tunnel afin de fermer la boîte ; on a donc un seul mode évanescent, la conductance est inférieure à  $2e^2/h$  (voir la caractéristique typique de nos points-contact sur la figure 4.4). Pour mesurer la conductance, l'échantillon est polarisé en courant, la tension étant mesurée par une détection synchrone. La difficulté de cette technique réside dans le très fort contraste entre les maxima et les minima de conductance : il faut d'une part s'assurer que la tension développée aux bornes de l'échantillon reste inférieure à la température sur les minima de conductance, et d'autre part mettre assez de courant pour avoir du signal sur les maxima de conductance. De plus, la résistance importante de l'échantillon sur les minima de conductance oblige à travailler à basse fréquence (typiquement  $10Hz$ ), ce qui entraîne des constantes de temps élevées pour les mesures.

L'allure des pics de conductance que l'on observe est montrée sur la figure 10.4. On peut voir sur cette figure qu'à basse température, on est bien dans le régime quantique. En particulier, on observera sur le pic à  $-630mV$  que :

- La hauteur du pic remonte pratiquement au quantum de conductance ( $e^2/h$ ), ce qui n'est possible que dans le régime quantique
- La hauteur du pic décroît avec la température
- L'amplitude des pics en fonction de la tension de grille est irrégulière



Il faut noter le très bon contraste des oscillations : par exemple, pour le pic à  $-630mV$ , on observe un rapport d'environ 130 entre le maximum et le minimum de conductance. La remontée du minimum de conductance vers les tensions de grille moins négatives peut s'expliquer par l'augmentation de la transmission des deux points-contact<sup>5</sup>. Notons que notre système expérimental nous permet d'explorer aussi les autres régimes de transport [39].

---

<sup>5</sup> Les différentes grilles étant très proches, lorsque l'on fait varier le potentiel de l'une d'entre elles, on fait varier aussi le potentiel sous les autres grilles : c'est l'effet appelé "cross-talk".

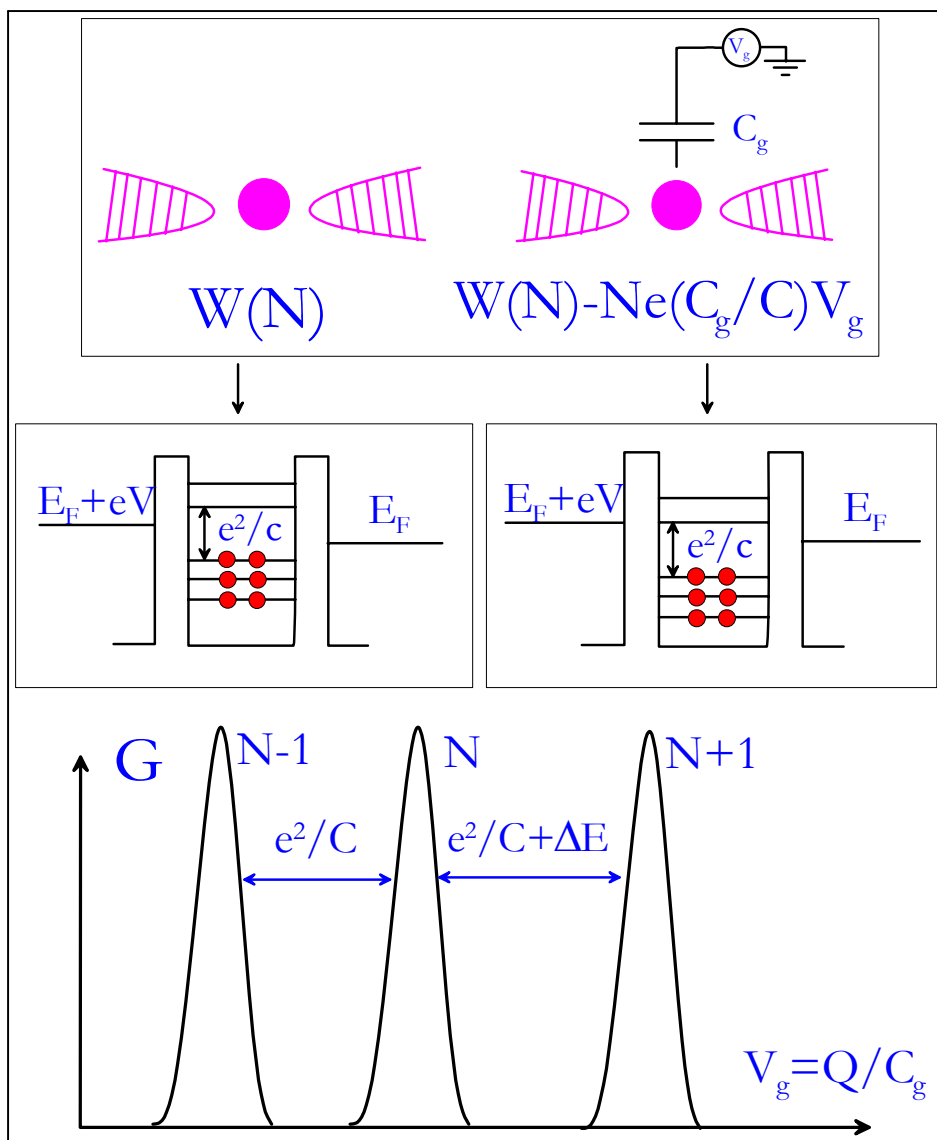


FIG. 10.2 – Principe du blocage de Coulomb : sur le schéma de gauche, l'énergie de charge empêche l'ajout d'un électron à la boîte ; le système est bloqué. Grâce à une grille couplée capacitivement à la boîte, on peut abaisser l'énergie électrostatique de celle-ci, et la conduction est rétablie. On a donc des oscillations de conductance en fonction de la tension de grille.

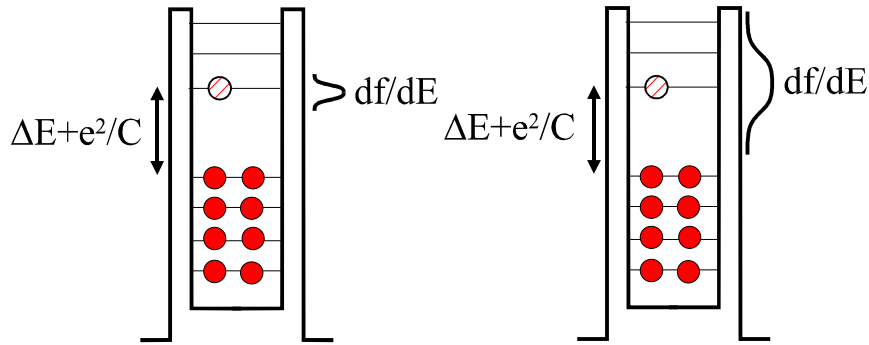


FIG. 10.3 – Différents régimes de transport : à gauche,  $k_B\theta \leq \Delta E$ , on est dans le régime quantique ; un seul niveau participe à la conduction. À droite,  $k_B\theta \geq \Delta E$ , on est dans le régime classique. Les niveaux d'énergie de la boîte ne sont plus résolus, on a un continuum d'états. C'est le régime des systèmes métalliques.

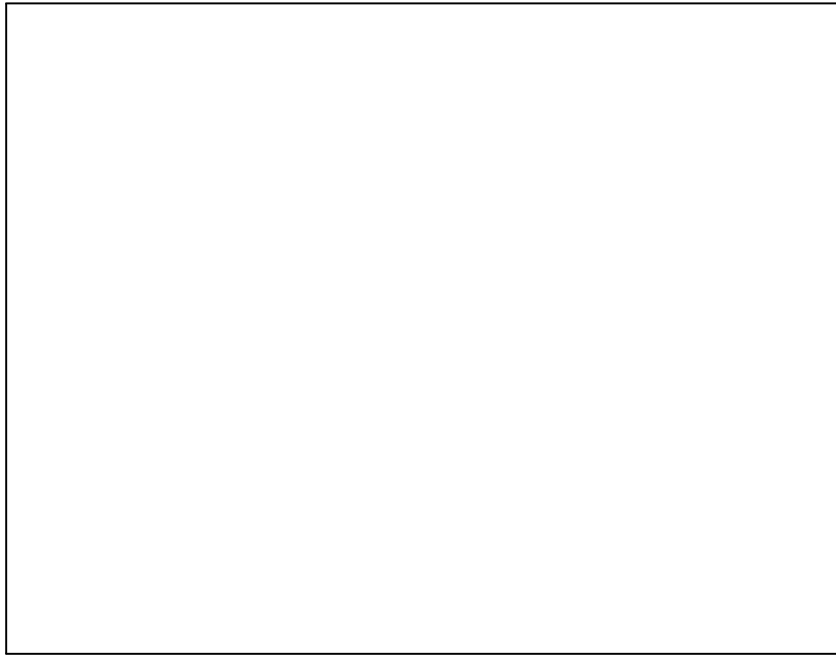


FIG. 10.4 – Oscillations de conductance en fonction de la tension de grille, à différentes températures entre  $31mK$  et  $460mK$ . On peut voir sur cette figure qu'on est bien dans le régime quantique à basse température : le deuxième pic remonte quasiment au quantum de conductance  $e^2/h$ , puis descend lorsque la température augmente. De plus, l'amplitude des différents pics est irrégulière.



# Chapitre 11

## Mesure du bruit en charge d'une boîte quantique

### 11.1 L'électromètre à blocage de Coulomb

Actuellement, les électromètres commerciaux utilisent des transistors à effet de champ (*FET*) : la charge à détecter induit une charge-image sur la grille, qui module la conductance du canal. Le *FET* étant polarisé en courant, on détecte une variation de la tension drain-source.

Nous avons vu que les boîtes quantiques pouvaient permettre de compter les électrons un par un : à chaque pic de conductance correspond l'ajout d'un électron dans la boîte. Ces pics sont séparés par des tensions de grille de l'ordre de la dizaine de millivolts, et donc aisément mesurables avec une grande précision. Une telle sensibilité en charge fait de ces systèmes à blocage de Coulomb de bons candidats pour l'électrométrie [19, 148].

L'objet de cette étude est de mesurer les limitations en sensibilité d'un tel système. Bien sûr, les processus physiques mis en jeu imposent une première limitation intrinsèque au système. Cependant, nous verrons que d'autres phénomènes extrinsèques limitent encore plus, à l'heure actuelle, la sensibilité de ces systèmes.

#### 11.1.1 Principe

Le but d'un électromètre est de détecter une charge. La figure 11.1 montre comment utiliser la boîte quantique pour y parvenir. La charge  $q$  que l'on veut détecter est couplée à la boîte par une capacité  $C'$  dépendant de la distance de la charge à la boîte<sup>1</sup>. Le signal que l'on détecte correspond à la variation

---

<sup>1</sup>Si on se place dans le vide, la constante diélectrique n'intervient pas.

de charge induite<sup>2</sup> dans la boîte,  $q' = qC'/C$ , où  $C$  est la capacité propre (totale) de la boîte. La variation de tension drain-source que l'on détecte est alors donnée par :

$$dV_{ds} = \frac{\partial V_{ds}}{\partial q'} dq' = \frac{\partial V_{ds}}{\partial V_g} \frac{\partial V_g}{\partial q'} dq' = \frac{A}{C_g} dq'$$

Dans cette expression, le terme  $A$  est le gain de l'électromètre, que l'on mesure expérimentalement en appliquant une tension alternative sur la grille.

### 11.1.2 Limitation de la résolution

Idéalement, un tel système pourrait avoir une résolution infinie. Cependant, le bruit peut altérer sa sensibilité, en faisant fluctuer de façon aléatoire la tension  $V_{ds}$ . Nous allons décrire ici les différentes sources de bruit présentes dans l'échantillon.

**Bruit thermique** C'est le bruit d'équilibre, qui vaut :

$$S_V = 4k_B\theta R$$

où  $R$  est l'impédance de l'échantillon (cf. § A.2.1). Ce bruit blanc n'est dominant que pour  $eV_{ds} \preceq k_B\theta$ ; ensuite, c'est le bruit de grenaille qui devient dominant.

**Bruit de grenaille** Ce bruit a pour origine la granularité de la charge (cf. § 3.1). Il est indépendant de la fréquence, et domine lorsque la tension drain-source devient supérieure à la température. Notons que les corrélations peuvent le réduire en-dessous de sa valeur classique  $2eI$  lorsque l'électromètre fonctionne dans le régime quantique [162]. À haute fréquence, c'est le processus dominant, et donc celui qui limite la sensibilité de l'électromètre.

**Bruit en résistance** Les fluctuations des résistances-tunnel des deux barrières produisent des fluctuations de la résistance de l'échantillon. Celui-ci étant polarisé en courant, il en résulte un bruit en tension qui vaut :

$$S_V = S_{R_d} I$$

Notons que ce bruit devrait être corrélé avec le bruit en charge, vu que tous deux résultent de la même fluctuation du potentiel électrostatique autour de la boîte.

---

<sup>2</sup> Avec ce système, tout comme avec un *FET*, on ne mesure qu'une charge *induite*, la détermination exacte de la capacité  $C'$  étant impossible.

**Bruit basse fréquence** À basse fréquence, le bruit dominant est un bruit extrinsèque au système, dû aux déplacements de charges sur le substrat (“ charges d’offset ”). Ces charges se couplent capacitivement à la boîte, induisant des fluctuations de l’état de charge de la boîte, et donc un bruit sur la tension drain-source. C’est ce bruit qui limite la sensibilité d’un électromètre à blocage de Coulomb à basse fréquence.

Concrètement, la boîte quantique détecte les charges se déplaçant autour d’elle sur le substrat ; si on veut détecter une charge passant dans le vide près de l’électromètre, il faut que celle-ci entraîne une variation de l’état de charge de la boîte supérieure à celle engendrée par ces charges d’offset. Nous allons donner quelques exemples de charges d’offset pouvant être présentes dans nos systèmes. Notons qu’il est cependant difficile de faire un calcul quantitatif du bruit qu’elles génèrent ; il est donc important de le mesurer sur différents échantillons, et sur différents systèmes, pour pouvoir se faire une idée quantitative du niveau de bruit de ce type d’électromètre [18, 19, 148, 164].

### 11.1.3 Différentes sources de bruit basse fréquence

Comme nous l’avons vu, le bruit basse fréquence provient principalement des charges se déplaçant sur le substrat à proximité de la boîte quantique. Il est donc important d’essayer d’identifier les différentes origines probables de ces charges d’offset, afin de pouvoir envisager de travailler sur les substrats pour améliorer les performances de ces électromètres. Notons que dans le cadre de ce projet européen, une grande variété de systèmes a déjà été étudiée [18].

La figure 11.2 représente les différentes charges d’offset présentes dans nos échantillons fabriqués sur des hétérojonctions :

- Des charges résiduelles peuvent demeurer sur la surface, et bouger au cours du temps.
- Les atomes de silicium, qui fournissent les porteurs dans la structure, s’ionisent de façon aléatoire ; à basse température, on a donc une distribution aléatoire de donneurs ionisés ou non, et ceux-ci peuvent piéger et dépiéger des électrons au cours du temps.
- Enfin, la gravure du méso entraîne de fortes variations de potentiel au bord de l’échantillon. Il peut donc se former des “ boîtes quantiques involontaires ” à proximité du bord du gaz d’électrons. Ces boîtes peuvent capter ou libérer un électron, tout comme la boîte quantique volontaire que nous étudions.

Tous ces phénomènes entraînent, par couplage capacitif, des variations de l’état de charge de la boîte, et donc du bruit. Chaque défaut, en oscillant entre deux états de charge, produit un bruit télégraphique, dont la dépendance en

fréquence est lorentzienne. Si la distribution des énergies d'activation de ces défauts est uniforme, le bruit résultant présente une dépendance caractéristique en  $1/f$  (cf. annexe A.2.2).

Enfin, la température qui intervient dans ces processus activés a une importance cruciale pour le bruit. Le réfrigérateur impose une température de quelques dizaines de  $mK$  au bain de phonons ; le rayonnement de corps noir émis par les parois de la boîte expérimentale a la même température. Par contre, les câbles coaxiaux peuvent apporter des photons thermiques à  $300K$  venant de la pièce. Le couplage avec les phonons est bien plus grand que le couplage avec les photons. Cependant, à basse température, le nombre de photons peut être exponentiellement grand devant le nombre de phonons ; le taux d'événements-tunnel, par exemple l'entrée ou la sortie d'un électron d'une boîte quantique involontaire, est alors donné par la température des photons [163]. Il est donc indispensable de filtrer efficacement ces photons, afin de ramener la température de l'environnement électromagnétique entourant l'échantillon le plus près possible de la température du réseau cristallin [18, 73, 164].

## 11.2 Résultats expérimentaux

### 11.2.1 Dispositif experimental

#### Mesure de la résistance différentielle et du gain

L'échantillon que nous avons utilisé est le même que celui qui nous a servi pour mesurer la réduction du bruit de grenaille dans un point-contact<sup>3</sup>. La technique pour mesurer le bruit est celle décrite au paragraphe 4.2. Ici, la mesure en corrélation est un point particulièrement crucial : en effet, le bruit basse fréquence des amplificateurs est lui-même très important, et pourrait masquer le signal que l'on veut mesurer.

L'échantillon est polarisé en courant par une impédance de  $100M\Omega$ . Un courant de  $1pA$  à  $7.5Hz$  est ajouté afin de mesurer la résistance différentielle  $\partial V_{ds}/\partial I$ . Pour mesurer le gain  $\partial V_{ds}/\partial V_g$ , on applique une tension alternative sur la grille de  $100\mu V$ , à une fréquence de  $11.5Hz$ . On envoie les deux

---

<sup>3</sup>Il faut cependant noter que l'échantillon a subi entre les deux expériences un cyclage thermique. Or, à chaque refroidissement, la configuration des impuretés change. Si, au niveau macroscopique, on a bien le même échantillon, il peut être très différent du point de vue microscopique en ce qui concerne le désordre, et donc le bruit basse fréquence. Dans la suite, les différents échantillons sont en fait le même échantillon "physique" après différents cyclages thermiques.



signaux sur deux détections synchrones différentes, pour pouvoir les mesurer en même temps.

### Polarisation de l'échantillon

L'effet d'une variation de l'état de charge de la boîte est de faire passer la boîte d'un régime passant à un régime bloqué. Sur la caractéristique  $I(V)$  représentée sur la figure 11.3, on voit qu'il existe un courant optimal de polarisation de la boîte pour maximiser le signal.

D'un autre côté, le signal croît comme le courant, alors que le bruit croît comme  $\sqrt{I}$  (bruit de grenaille). Le rapport signal/bruit augmente donc en  $\sqrt{I}$ . Par conséquent, on a intérêt à augmenter le courant pour augmenter le rapport signal sur bruit. Cependant, la tension aux bornes de l'échantillon ne peut excéder  $e/C$ , sous peine de supprimer le blocage de Coulomb. La polarisation optimale consiste alors à rendre les barrières relativement passantes ( $R \gtrsim h/e^2$ ) et symétriques, afin d'augmenter le co-tunneling et donc le courant de polarisation [148, 149, 164].

On peut fixer aisément une limite supérieure au courant : la conductance de la boîte ne pouvant excéder le quart de la conductance-série des deux barrières (cf. § 10.3.2), et la tension  $e/C$ , on trouve dans nos boîtes un courant maximal de  $1nA$ .

### 11.2.2 Mesures de bruit

#### Validation du système expérimental

Nous avons effectué nos mesures sur un échantillon que nous avons recyclé thermiquement. La configuration d'impuretés étant complètement différente après un cyclage thermique, nous pouvons considérer que nous avons utilisé deux échantillons, que nous appellerons échantillon 1 et 2.

Nous avons tout d'abord vérifié que le système permet bien d'extraire le bruit en charge des autres sources de bruit. Pour cela, on se fixe à une tension de grille telle que le gain de l'électromètre soit nul. On s'attend alors à mesurer la somme du bruit thermique, du bruit de grenaille, du bruit en résistance, et du bruit en courant des amplificateurs (cf. § 4.2). La figure 11.4 représente la densité spectrale de bruit en tension sur un maximum et un minimum de gain, pour un courant de polarisation de  $100pA$  et une température de  $38mK$ . On constate qu'à basse fréquence, le bruit intrinsèque est effectivement largement inférieur au bruit en charge : à  $10Hz$ , on trouve un facteur 5 entre les valeurs mesurées sur un maximum et un minimum de gain. Ceci valide notre système de mesure, qui permet d'extraire sans ambiguïté le bruit en charge des autres

sources de bruit. De plus, il faut remarquer que le bruit n'est pas en  $1/f$ , mais en  $1/f^2$  (la courbe représente la *racine carrée* de la densité spectrale de bruit). Comme nous l'avons vu au paragraphe 11.1.3, ceci indique que le bruit est essentiellement généré par une seule impureté, placée très près de la boîte quantique. Celle-ci oscille dans le temps entre deux états, produisant un bruit lorentzien. Le fait que l'on n'observe aucune saturation du bruit jusqu'à  $1\text{Hz}$  nous indique que la fréquence propre de ce système à deux niveaux est inférieure au hertz.

### Limite supérieure du bruit intrinsèque

Sachant que le bruit intrinsèque donne la limite fondamentale en sensibilité de ces électromètres, il est intéressant de savoir à partir de quelle fréquence on va retrouver ce "plancher". Pour cela, nous avons exploré le spectre à plus haute fréquence.

La figure 11.5 représente la même mesure que précédemment, sur un maximum de gain, mais avec une exploration en fréquence plus large. On constate que le bruit devient blanc à partir de  $700\text{Hz}$  environ.

Nous avons ensuite regardé l'influence de la polarisation de la boîte sur ce bruit blanc ; les tableaux 11.1 et 11.2 montrent les mesures de bruit obtenues à  $700\text{Hz}$  sur l'échantillon 2 pour différents courants de polarisation, sur un minimum et un maximum de gain.

$I[pA]$	$R_d[k\Omega]$	$\sqrt{S_V}[nV/\sqrt{Hz}]$	$\sqrt{S_V}/R_d[fA/\sqrt{Hz}]$
100	57.5	1.6	27.8
200	59.7	1.73	29
300	70	2.03	28.9
400	102	2.9	28.4

(11.1)

La dernière colonne du tableau 11.1 nous montre que le bruit blanc mesuré au-dessus de  $700\text{Hz}$  correspond en fait au bruit en courant des amplificateurs, soit  $30fA/\sqrt{Hz}$  (cf. § 4.2), c'est à dire un bruit dû au système de mesure, et non à l'échantillon.

Le tableau 11.2 donne la valeur du bruit mesuré à  $700\text{Hz}$ , cette fois sur un maximum de gain.

$I[pA]$	$A$ (Gain)	$R_d[k\Omega]$	$\sqrt{S_V}[nV/\sqrt{Hz}]$	$\sqrt{S_V}/R_d[fA/\sqrt{Hz}]$	$\sqrt{S_Q}[e/\sqrt{Hz}]$
100	0.0029	89	2.5	29	$3.8 \cdot 10^{-5}$
200	0.0032	88.6	2.77	31.3	$3.7 \cdot 10^{-5}$
300	0.0044	92	3.0	32.6	$2.92 \cdot 10^{-5}$
400	0.0053	137	4.26	31.1	$3.25 \cdot 10^{-5}$

(11.2)

Encore une fois, comme le montre la cinquième colonne du tableau 11.2, la valeur du bruit en charge mesurée, soit  $3 - 4 \cdot 10^{-5} e/\sqrt{Hz}$ , ne reflète pas réellement le bruit intrinsèque de l'électromètre, mais la valeur du bruit en courant de nos amplificateurs. Cette mesure ne permet donc que de donner une *majoration* de la sensibilité de ce système ; la valeur réelle est sans doute, elle, inférieure à  $10^{-5} e/\sqrt{Hz}$  au-dessus de  $700 Hz$ .

### Variation des conditions de polarisation

Si le bruit à basse fréquence est un bruit en charge, lié aux mouvements de charges d'offset sur le substrat autour de la boîte, celui-ci devrait être indépendant des conditions de polarisation de l'électromètre. Pour le vérifier, nous avons effectué des mesures sur deux pics de Coulomb différents, et en variant le courant. Notons que sur deux pics de Coulomb différents, le couplage-tunnel avec les réservoirs varie : cela revient donc bien à modifier la polarisation de l'électromètre.

Les tableaux 11.3 et 11.4 rassemblent les valeurs obtenues sur l'échantillon 1 à  $10 Hz$ .

$I[pA]$	$A$ (Gain)	$R_d[k\Omega]$	$\sqrt{S_V}[nV/\sqrt{Hz}]$	$\sqrt{S_Q}[e/\sqrt{Hz}]$
100	0.040	420	192	$1.8 \cdot 10^{-4}$
300	0.041	223	210	$2.1 \cdot 10^{-4}$
400	0.033	250	174	$2.1 \cdot 10^{-4}$
500	0.025	245	130	$2.2 \cdot 10^{-4}$
600	0.022	138	115	$2.1 \cdot 10^{-4}$

(11.3)

$I[pA]$	$A$ (Gain)	$R_d[k\Omega]$	$\sqrt{S_V}[nV/\sqrt{Hz}]$	$\sqrt{S_Q}[e/\sqrt{Hz}]$
100	0.031	360	97	$1.23 \cdot 10^{-4}$
200	0.032	140	99	$1.26 \cdot 10^{-4}$
400	0.033	110	115	$1.4 \cdot 10^{-4}$
600	0.025	45	80	$1.24 \cdot 10^{-4}$
800	0.020	38	66	$1.29 \cdot 10^{-4}$

(11.4)

On voit que, comme prévu, le gain et la résistance différentielle sont très sensibles au courant de polarisation. Cependant, le bruit en charge, lui, reste sensiblement constant lorsque l'on fait varier le courant, et on trouve des valeurs comparables ( $\simeq 2 \cdot 10^{-4} e/\sqrt{Hz}$  et  $1.3 \cdot 10^{-4} e/\sqrt{Hz}$ ) pour les deux couplages-tunnel différents. Ceci confirme que le bruit à basse fréquence est bien un bruit lié à des charges d'offset se déplaçant autour de l'électromètre.

Les meilleures valeurs trouvées, de l'ordre de  $10^{-4} e/\sqrt{Hz}$  à  $10 Hz$ , sont comparables à celles obtenues sur les systèmes métalliques [18, 148, 164, 165,

166]. En fait, toutes les mesures effectuées dans le cadre de notre projet européen ont donné le même ordre de grandeur pour le bruit en charge des électromètres à blocage de Coulomb. Il est difficile de dire si cela est un pur hasard ou s'il y a à cela une raison plus fondamentale.

### Effet de la température

Sur la courbe de la figure 11.4, le bruit a une dépendance en fréquence en  $1/f^2$ . Ceci indique que le bruit est généré essentiellement par une seule impureté située à proximité de la boîte, les autres fluctuateurs étant soit trop éloignés, soit ayant une énergie d'activation trop élevée. La figure 11.6 représente l'évolution du bruit lorsque l'on augmente la température. Le bruit est nettement en  $1/f^2$  à basse température, mais on retrouve une dépendance en  $1/f$  vers  $600mK$ . En effet, lorsque la température augmente, on active de plus en plus de fluctuateurs, et ce sur tout le substrat. Le niveau de bruit augmente, et sa dépendance en fréquence devient celle d'une large collection de systèmes à deux niveaux, soit  $1/f$  (cf. annexe A.2.2). Enfin, il faut remarquer que la sensibilité mesurée,  $10^{-5}e/\sqrt{Hz}$  à  $100Hz$ , est bien meilleure que celle des électromètres commerciaux.

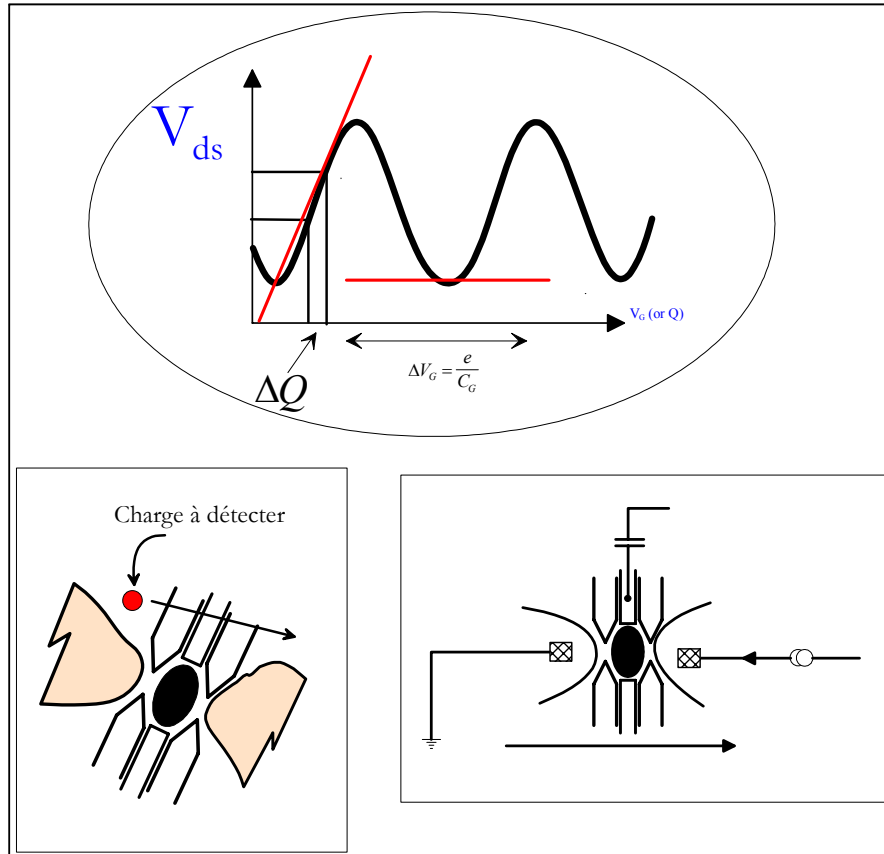


FIG. 11.1 – Principe de l'électromètre à blocage de Coulomb : la charge à détecter induit une charge-image dans la boîte, ce qui entraîne une variation de la tension drain-source. La figure du haut représente les oscillations de la tension en fonction de la charge dans la boîte, les traits rouges le gain de l'électromètre. La figure en bas à droite est un schéma de principe du montage.

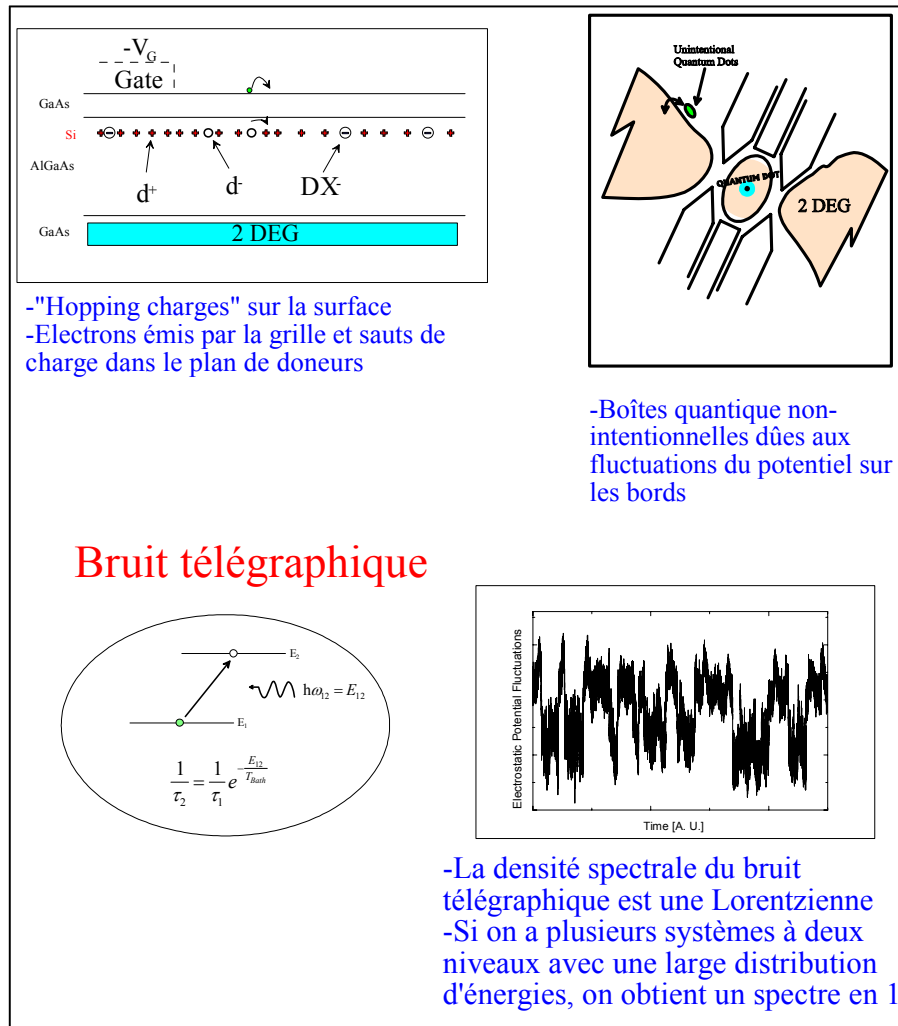


FIG. 11.2 – Différentes sources de bruit : mouvement de charges à la surface, mouvement de charges dans le matériau, ou boîtes quantiques involontaires qui se forment au bord du méso (figure du haut). Tous ces défauts sont des systèmes à deux niveaux qui génèrent du bruit télégraphique en oscillant entre les deux états (figure du bas).

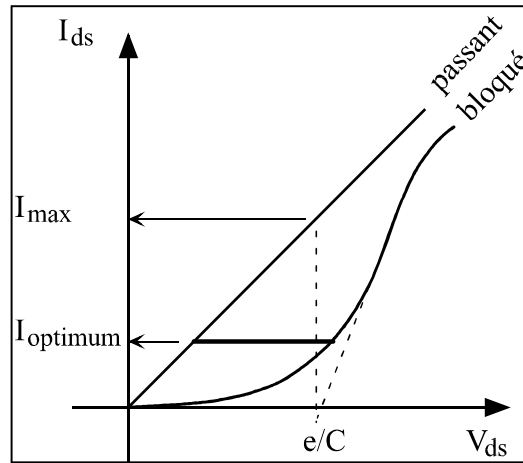


FIG. 11.3 – Caractéristique  $I(V)$  d'une boîte quantique dans les régimes passant et bloqué. L'arrondissement de la courbe en régime bloqué est dû au co-tunneling. On voit qualitativement qu'il existe un courant optimal de polarisation.

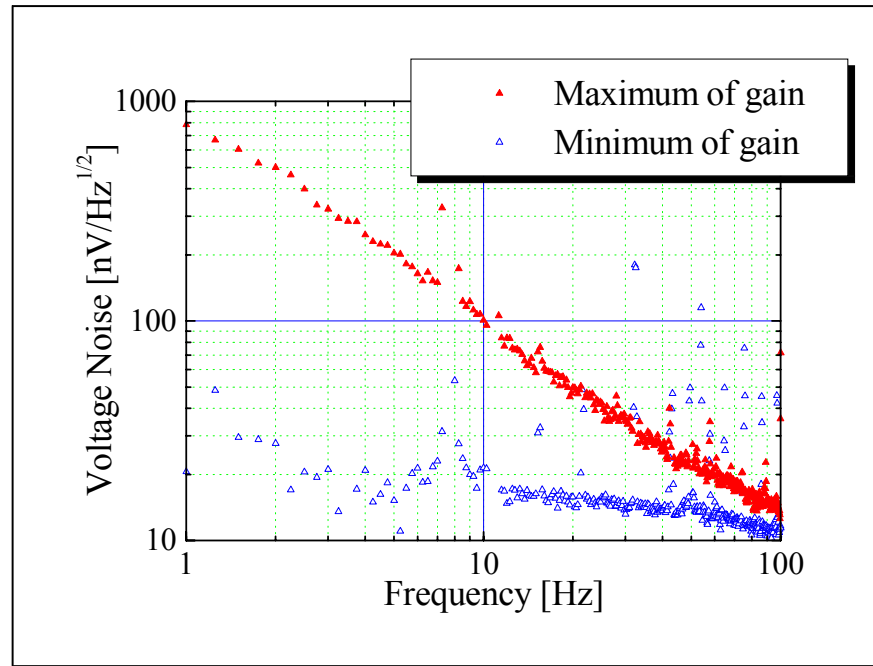


FIG. 11.4 – Densité spectrale de bruit en tension sur un maximum et un minimum de gain, mesurée sur l'échantillon 1. Le courant de polarisation est de  $100\text{pA}$ , la température de  $38\text{mK}$ . Comme prévu, le bruit en charge domine largement le bruit intrinsèque à basse fréquence. C'est donc lui qui limite la sensibilité de l'électromètre.



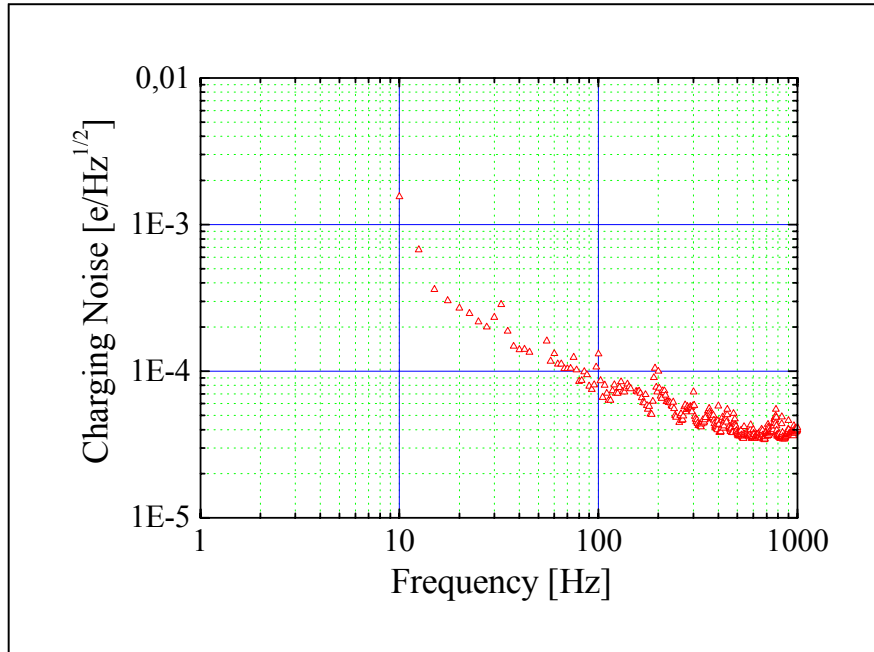


FIG. 11.5 – Mesure du bruit en charge en fonction de la fréquence, sur l'échantillon 2 et dans les mêmes conditions de polarisation ( $I = 100pA$ ,  $\theta = 38mK$ ) que pour l'échantillon 1 de la figure 11.4. On voit que l'on atteint le régime où le bruit intrinsèque domine vers  $700Hz$ .

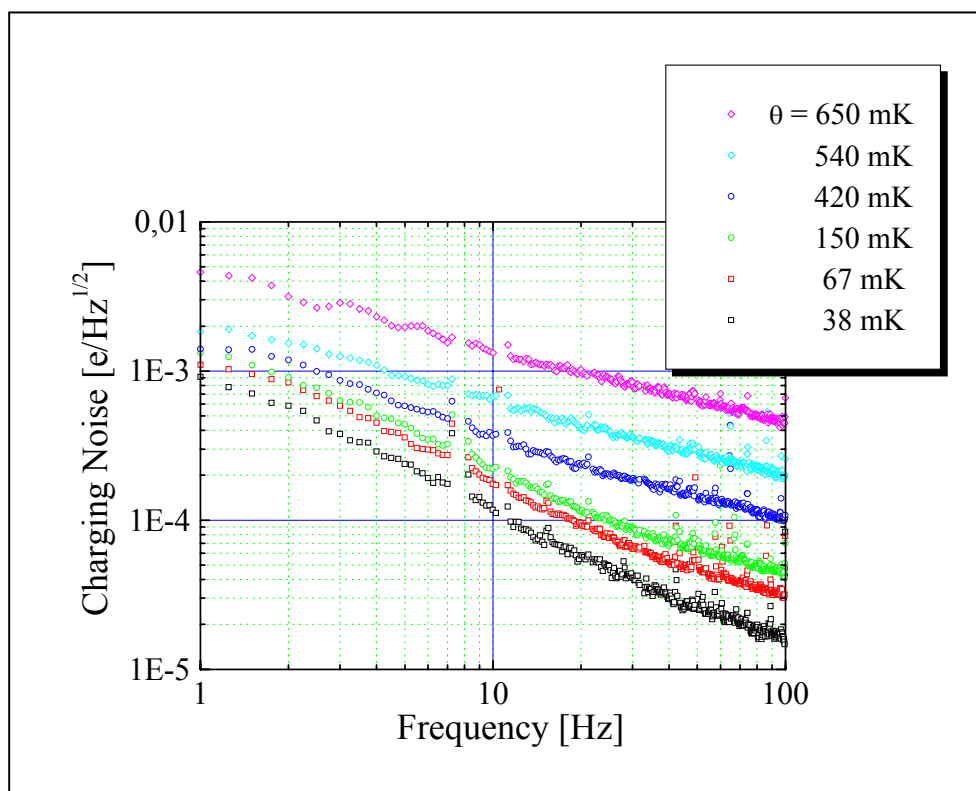


FIG. 11.6 – Densité spectrale de bruit en charge à différentes températures, pour l'échantillon 1. Le courant de polarisation est de  $100\text{pA}$ .

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des mesures concernant le bruit à basse fréquence d'électromètres à blocage de Coulomb. Nos boîtes quantiques sont réalisées sur des hétérojonctions d'Arséniure de gallium, système permettant une très grande souplesse d'utilisation dans le cadre de cette étude fondamentale. Nous avons pu ainsi mesurer la limite de sensibilité de ces électromètres, limite dont l'origine se trouve dans les charges d'offset qui se déplacent à proximité de la boîte quantique.

Les valeurs de bruit en charge mesurées, de  $10^{-4}e/\sqrt{Hz}$  à  $10Hz$ , et  $10^{-5}e/\sqrt{Hz}$  à  $100Hz$ , sont comparables à celles obtenues dans les systèmes métalliques, et de plusieurs ordres de grandeur meilleures que celles des électromètres commerciaux. Ces valeurs ne dépendent pas des conditions de polarisation ou de la configuration précise des impuretés (la même valeur est obtenue après un cyclage thermique). La dépendance en fréquence est en  $1/f$  à haute température. Lorsque l'on refroidit, le niveau de bruit baisse, et la dépendance en fréquence peut devenir en  $1/f^2$  si le bruit est dominé par un seul système à deux niveaux qui fluctue dans le temps.

Du point de vue des applications, cette étude montre que le problème du bruit basse fréquence est essentiellement un problème lié aux substrats utilisés : ce bruit est généré par des fluctuateurs à proximité de la boîte, qui peuvent être des boîtes quantiques involontaires dues à la gravure du méso, ou des charges se déplaçant en surface. Un travail intéressant serait d'essayer de façon extensive différents substrats. De plus, cette étude permettrait de savoir si le fait que les valeurs de bruit en charge mesurées sur différents systèmes soient du même ordre de grandeur est purement fortuit, ou si il a une origine plus fondamentale.



## Conclusion générale



“ Il y a diverses sortes de curiosités : l’une d’intérêt, qui nous porte à désirer d’apprendre ce qui nous peut être utile, et l’autre d’orgueil, qui vient du désir de savoir ce que les autres ignorent. ”

LA ROCHEFOUCAULD,  
in *Réflexions ou Sentences et Maximes morales*

Les moyens actuels de lithographie et de cryogénie permettent depuis quelques années de fabriquer des systèmes dont la taille est inférieure à la longueur de cohérence de phase des électrons. Il est donc devenu possible d’explorer le domaine jusqu’alors inaccessible du transport quantiquement cohérent. Ce qui était du domaine de l’expérience de pensée est donc devenu une réalité concrète.

Cependant, la plupart des expériences de physique mésoscopique concernaient jusqu’à récemment les propriétés ondulatoires des électrons, qui étaient sondées grâce à des mesures de conductance ou de courants permanents. Pour aller plus loin, et regarder les propriétés quantiques corpusculaires des porteurs, il faut procéder à d’autres types d’expériences. Les mesures de bruit permettent d’avoir accès à la *statistique* des porteurs, ce qui, combiné avec une mesure de conductance, permet de mettre en évidence le double aspect ondulatoire et corpusculaire des électrons.

Nous avons pu disposer d’échantillons de très haute mobilité électronique, et donc de très grande longueur de cohérence de phase. De plus, la technique de confinement électrostatique des électrons par des grilles déposées à la surface de l’échantillon permet de moduler à volonté la forme du gaz d’électrons, ce qui donne une très grande souplesse d’utilisation à ce genre de système.

Notre travail de thèse s’est articulé autour de trois points :

Nous nous sommes d’abord intéressés au bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique. Le bruit de grenaille, auquel Schottky s’était intéressé dans le cas d’une diode à vide, est dû à la granularité des porteurs. Dans le cas classique d’une émission non corrélée d’électrons, celui-ci est directement proportionnel au courant. Comment transposer ce phénomène dans le cas d’un conducteur mésoscopique ? Dans le cas d’un contact ponctuel quantique, nous avons montré que lorsque la barrière est très peu passante, les électrons qui la traversent se comportent comme s’ils étaient émis de façon aléatoire et non corrélée ; on retrouve alors le bruit de grenaille classique, celui-là même prédit par Schottky. Cependant, lorsque la transparence de la barrière augmente, la principe d’exclusion de Pauli corréle le flot d’électrons, et le bruit de grenaille est réduit, voire supprimé lorsque la transmission de la barrière vaut 1. Enfin, nous avons mis en évidence que l’on passe continuellement du bruit thermique d’équilibre au bruit de grenaille, avec un *cross-over* lorsque la température correspond à la température appliquée. Cette expérience a donc permis de mettre en évidence l’aspect corpusculaire des

électrons dans un conducteur mésoscopique, *via* le principe de Pauli, tandis que la conductance nous donnait la transmission de l'onde électronique.

Nous avons ensuite utilisé le bruit de grenaille pour mesurer la charge des porteurs en régime d'effet Hall quantique fractionnaire. En effet, une des prédictions les plus remarquables de la théorie dans ce régime est que les excitations, les quasiparticules de Laughlin, sont de charge fractionnaire. Plus généralement, différents modèles prévoient l'existence de charges fractionnaires dans les systèmes de basse dimensionnalité ; cependant, leur observation expérimentale n'est pas chose aisée. En régime d'effet Hall quantique, le gap pour ces quasiparticules s'annule aux bords de l'échantillon. Nous avons utilisé cette propriété pour faire tunneler des quasiparticules d'un bord à l'autre de l'échantillon, et mesurer le bruit de grenaille associé à leur passage. Si on se place dans la limite classique, c'est à dire la limite de faible tunneling, les quasiparticules ne sont plus corrélées. On retrouve alors le bruit de grenaille classique, qui est proportionnel à la charge des porteurs. De plus, de la même façon qu'en champ nul, on s'attend à trouver un cross-over entre le bruit thermique et le bruit de grenaille, mais cette fois quand la tension vaut trois fois la température. Ces deux points ont été vérifiés expérimentalement. Nous avons ainsi pu mettre en évidence que ce sont bien des quasiparticules de charge fractionnaire qui transportent le courant en régime d'effet Hall quantique fractionnaire.

Enfin, la troisième partie de notre travail a porté sur un sujet plus appliqué, les boîtes quantiques. Nous avons étudié expérimentalement le bruit basse fréquence de ces systèmes. En particulier, nous avons montré que celui-ci était généré par des impuretés résiduelles du substrat, autour de la boîte. En général, l'effet de ces impuretés est négligé dans les expériences de transport. Cependant, dans l'éventualité d'une utilisation de ces boîtes quantiques en métrologie, comme mémoires, en logique ou en électrométrie, il est important de bien le caractériser. L'expérience que nous avons mise au point pour les deux premières parties de notre travail nous a donc servi à le mesurer " proprement ", c'est à dire en particulier en s'affranchissant au maximum du bruit des appareils de mesure. Notre expérience a montré que le bruit basse fréquence provenait d'un ensemble de systèmes à deux niveaux (" défauts " de différentes natures), qui oscillaient au cours du temps entre les deux états. Si le bruit est dominé par un seul fluctuateur, la caractéristique spectrale est en  $1/f^2$ . Si la boîte voit un grand nombre de fluctuateurs, cette caractéristique tend vers une loi en  $1/f$ . Enfin, nous avons montré que le bruit généré par ces défauts du substrat est 10 fois supérieur au bruit intrinsèque de la boîte. Ce résultat est par ailleurs assez reproductible sur d'autres



systèmes. L'amélioration des caractéristiques de bruit des boîtes quantiques passe donc essentiellement par un travail sur les substrats.

La physique mésoscopique est un domaine en plein développement. Les progrès des techniques expérimentales ont permis de mettre en évidence de nombreux phénomènes nouveaux dans le domaine de la physique des solides. Actuellement, une nouvelle branche de cette discipline commence à émerger : l'étude de l'effet des interactions sur le transport. La théorie est déjà bien avancée, et les premières expériences commencent à apparaître. Il s'agit sûrement là d'un sujet porteur pour les années à venir.

Enfin, il faut noter que la physique mésoscopique ne saurait demeurer longtemps une curiosité de physique fondamentale : les progrès de la lithographie laissent prévoir que les dispositifs électroniques seront bientôt quantiques, même à température ambiante. Déjà, des études sont menées dans de nombreux laboratoires, tant académiques qu'industriels, en vue de l'utilisation des boîtes quantiques comme mémoires. La physique mésoscopique rejoindra alors l'électronique...



# **Annexes**



# Annexe A

## Le bruit : définitions et exemples courants

### A.1 Définitions

#### A.1.1 Densité de probabilité, valeur moyenne, variance

La notion de bruit fait référence à des processus aléatoires (ou stochastiques), et à leur variation autour de leur valeur moyenne. Dans notre cas, la variable à considérer est le courant, mais on peut appliquer les concepts que nous étudierons à toute autre grandeur physique (bruit d'aimantation, bruit de la force dans les problèmes de mouvement Brownien). Si on considère une variable  $X$ , on définit la probabilité de trouver  $X$  entre  $X$  et  $X + dX$  par :

$$dP = f(X) dX$$

où  $f(X)$  est appelée la densité de probabilité. Si on se limite à des processus stationnaires,  $f$  ne dépend pas du temps. Une première propriété évidente de  $f$  est qu'elle est normalisée :

$$\int f(X) dx = 1$$

À partir de  $f$ , on peut calculer des *valeurs moyennes* ; ainsi, la valeur moyenne d'une fonction  $g$  s'exprime par :

$$\overline{g(X)} = \int g(X) f(X) dX$$

Un exemple important est la valeur moyenne de  $X^m$ , appelée  $m^{\text{ième}}$  moment de  $X$  :

$$\overline{X^m} = \int X^m f(X) dX$$

Les premier et deuxième moments de  $X$  sont particulièrement importants, car ils servent à calculer la *variance* de  $X$ , définie par :

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

La variance de  $X$  se réduit donc au deuxième moment si  $X$  est une variable centrée (de moyenne nulle).

Toutes ces notions peuvent se généraliser aisément à des variables discrètes en remplaçant les intégrales par des sommes discrètes. Il existe des exemples importants de densité de probabilité pour des variables discrètes, que nous utiliserons par la suite, comme la distribution binomiale, poissonnienne ou normale, que nous allons détailler.

### La loi binomiale

Si un événement a une probabilité  $p$  de donner le résultat  $A$ , et  $(1 - p)$  de donner le résultat  $B$ , et si les événements sont indépendants, la probabilité d'avoir  $n$  fois le résultat  $A$  après  $m$  essais est donnée par :

$$P_m(n) = \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n}$$

La valeur moyenne de  $n$  est alors donnée par  $\bar{n} = mp$  et la variance par  $\sigma^2 = mp(1 - mp)$ .

### La distribution Poissonnienne

C'est une distribution très importante dans le cadre de notre travail, car c'est elle qui mène à l'expression du bruit de grenaille *classique*. Elle concerne des événements *non corrélés* qui ont lieu de façon aléatoire avec une moyenne  $\bar{n}$ . La probabilité pour que  $n$  événements aient lieu par unité de temps est donnée par :

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

La variance peut être calculée simplement, en évaluant la quantité  $\overline{n(n-1)} = \bar{n}^2 - \bar{n}$  :

$$\overline{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) P(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

$$= \underbrace{\bar{n}^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\bar{n})^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\bar{n}}}_{=1} = \bar{n}^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \overline{n^2} - \bar{n} &= \bar{n}^2 \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \bar{n} \end{aligned}$$

## A.1.2 Corrélation

### Cas de deux variables aléatoires

Si on considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , la probabilité que la première variable ait une valeur comprise entre  $X$  et  $X + dX$ , et la seconde une valeur comprise entre  $Y$  et  $Y + dY$  est donnée par<sup>1</sup> :

$$dP = f(X, Y) dX dY$$

La fonction  $f(X, Y)$ , appelée densité de probabilité conjointe, satisfait la condition de normalisation :

$$\int \int f(X, Y) dX dY = 1$$

où l'intégrale double s'étend sur tout le domaine de variation de  $X$  et  $Y$ .

Les différents moments sont définis de la même manière que dans le cas d'une seule variable :

$$\overline{X^n Y^m} = \int \int X^n Y^m f(X, Y) dX dY$$

Bien entendu, dans le cas de variables discrètes, les intégrales précédentes sont remplacées par des sommes discrètes.

Le premier moment  $\overline{XY}$  est appelé *corrélation* des deux variables. C'est une grandeur très importante d'un point de vue expérimental : en effet, mesurer deux fois un signal et en calculer la corrélation est une des techniques que nous avons utilisées pour mener à bien nos expériences ; nous verrons

---

<sup>1</sup>Nous ne considérons ici que des processus stationnaires, c'est à dire indépendants du temps. La plupart des processus physiques, et en particulier ceux que nous étudierons par la suite, sont effectivement stationnaires. Si ce n'est pas le cas, il faut inclure explicitement le temps  $t$  dans la densité de probabilité conjointe.

que l'on gagne ainsi un facteur 2 sur la précision d'une mesure de bruit<sup>2</sup>. On appelle coefficient de corrélation la quantité :

$$c = \frac{\overline{XY}}{\sqrt{\overline{X^2Y^2}}}$$

On peut montrer que cette quantité est comprise entre  $-1$  et  $1$  ; pour cela, on utilise le fait que  $(\overline{X} + \lambda \overline{Y})^2 \succeq 0 \forall \lambda$  :

$$\overline{(X + \lambda Y)^2} = \overline{X^2} + \lambda^2 \overline{Y^2} + 2\lambda \overline{XY} \succeq 0$$

Le membre de gauche est une équation du second degré en  $\lambda$ . Pour que celui-ci soit positif ou nul pour tout  $\lambda$ , il faut que son discriminant soit négatif ou nul :

$$\overline{XY}^2 - \overline{X^2Y^2} \preceq 0$$

On obtient alors immédiatement<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{XY}^2}{\overline{X^2Y^2}} &\preceq 1 \\ \Rightarrow -1 &\preceq \frac{\overline{XY}}{\sqrt{\overline{X^2Y^2}}} \preceq 1 \\ \Rightarrow -1 &\preceq c \preceq 1 \end{aligned}$$

Quand  $c = 1$ , les deux signaux sont dits parfaitement corrélés. Quand  $c = -1$ , les deux signaux sont dits parfaitement anti-corrélés.

### Cas d'une seule variable aléatoire

La corrélation d'une variable avec elle-même est appelée *fonction d'autocorrélation* :  $\overline{X(t)X(t+s)}$  Les définitions sont les mêmes que dans le cas précédent, mais la fonction d'autocorrélation est particulièrement importante dans notre cas car c'est elle qui définit le *bruit*. Physiquement, elle correspond à la durée durant laquelle une fluctuation persiste dans le système. Le cas où  $\overline{X(t)X(t+s)}$  est une fonction delta est particulièrement important, puisque nous verrons qu'il donne lieu à un bruit blanc.

<sup>2</sup>En fait, on gagne un facteur 2 sur la mesure de la *puissance* de bruit, et un facteur  $\sqrt{2}$  sur la mesure du bruit lui-même.

<sup>3</sup>Ce résultat est connu en algèbre sous le nom de Lemme de Schwartz.



### A.1.3 Analyse de Fourier, définition du bruit

#### Théorème de Wiener-Khintchine

Soit  $X(t)$  une variable qui décrit un processus stochastique stationnaire (i.e. indépendant du temps). On la décompose en série de Fourier sur l'intervalle  $0 \leq t \leq T$ <sup>4</sup> :

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j\omega_n t}$$

avec  $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  et

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

On appelle densité spectrale de  $X(t)$  la quantité :

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{a_n a_n^*}$$

où  $a_n^*$  désigne le complexe conjugué de  $a_n$ . Le théorème de Wiener-Khintchine [43] stipule que :

$$S_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X(t) X(t+s)} e^{-j\omega s} ds$$

C'est cette définition que nous prendrons pour la densité spectrale de bruit. Dans le cadre de ce travail, on obtient en particulier que la densité spectrale de bruit en courant est donnée par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation courant-courant :

$$S_I(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{I(t) I(t+s)} e^{-j\omega s} ds$$

Il est intéressant de noter qu'à l'inverse, le bruit nous permet de remonter à la fonction d'autocorrélation :

$$\overline{X(t) X(t+s)} = \int_0^{+\infty} S_x(f) \cos \omega s \cdot df$$

Un cas particulier très important dans le cadre de notre étude sur le bruit est celui où la fonction d'autocorrélation  $\overline{X(t) X(t+s)}$  décroît rapidement

---

<sup>4</sup>À la fin du calcul, on prendra  $T \rightarrow \infty$ .

et est nulle pour  $s \gg \tau$ . Si on se réduit alors à l'intervalle  $\omega\tau \ll 1$ , on a  $e^{-j\omega s} \simeq 1$  et le bruit basse fréquence s'exprime par :

$$S_x(f)_{\omega\tau \ll 1} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X(t) X(t+s)} ds$$

Par exemple, si la fonction d'autocorrélation est une fonction delta,  $\overline{X(t) X(t+s)} = 2A\delta(s)$ , on obtient pour la densité spectrale de bruit :

$$S_x(f)_{\omega\tau \ll 1} = 2A$$

Il s'agit donc d'un bruit blanc (indépendant de la fréquence), jusqu'à la fréquence de coupure  $\omega = 1/\tau$ .

### Théorème de Carson

Le théorème de Carson permet de calculer le bruit de grenaille classique [42], par exemple celui que l'on observe dans une diode à vide. On considère un processus stationnaire, qui soit la somme d'événements indépendants qui ont lieu avec une probabilité  $\lambda$  (par exemple un courant électrique, dû au passage des électrons "individuels") :

$$Y(t) = \sum_i F(t - t_i)$$

On définit la transformée de Fourier  $\Psi(f)$  de  $F(u)$  par :

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-j\omega u} du$$

Le but du théorème de Carson est d'évaluer la densité spectrale de bruit  $S_Y(f)$  associée à ce processus. Comme les événements sont indépendants et qu'ils ont lieu de façon aléatoire, on peut se contenter dans un premier temps d'évaluer la densité spectrale de bruit  $S_i(f)$  associée à un seul événement, qui a lieu à l'instant  $t_i$ . Pour cela, on prend un intervalle de temps  $T$  tel que  $0 \ll t_i \ll T$ . On a alors :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t - t_i) \\ &= \frac{e^{-j\omega_n t_i}}{T} \int_{-t_i}^{T-t_i} F(u) e^{-j\omega_n u} du \end{aligned}$$

Si  $F(u)$  est une fonction qui décroît suffisamment vite dans le temps, on peut alors étendre le domaine d'intégration et on obtient :

$$a_n = \frac{e^{-j\omega_n t_i}}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-j\omega_n u} du = \frac{e^{-j\omega_n t_i}}{T} \Psi(f_n)$$

Finalement, on a :

$$S_i(f_n) = 2a_n a_n^* T = \frac{2 |\Psi(f_n)|^2}{T}$$

Comme il y a  $\lambda T$  événements dans l'intervalle  $0 \preceq t \preceq T$ , on peut obtenir la densité spectrale de bruit :

$$S(f) = 2\lambda |\Psi(f)|^2$$

Une application importante du théorème de Carson est le calcul du bruit provoqué par le passage des électrons dans un conducteur. Ce calcul a été fait initialement par Schottky [42], qui s'est intéressé au cas d'une diode à vide, dans laquelle les électrons sont émis de façon *rare* et *non corrélée* par la cathode (voir figure 3.1). Le bruit dû au passage de ces électrons est fondamentalement lié au fait que la charge est discrète : il ne s'agit pas d'un fluide, mais bien de quanta de charge qui portent le courant ; par analogie, on peut comparer ce bruit à celui de la pluie sur un toit : il est lié aux gouttes, c'est à dire aux “ quanta ” d'eau. Dans ce cas,  $\Psi(0) = q$ , la charge de l'électron, et  $\lambda = I/q$ , avec  $I$  le courant moyen. Le bruit à fréquence nulle<sup>5</sup> est alors donné par le théorème de Carson :

$$S_I(0) = 2\lambda |\Psi(0)|^2 = 2qI$$

On peut démontrer différemment que le Schot-Noise classique vaut  $2eI$ . Ce qu'il est important de noter ici, c'est que cette valeur est fondamentalement liée au fait que les électrons émis sont *non corrélés*, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Carson. De plus, ce résultat reste valable pour n'importe quel type de particules : gouttes de pluie ou balles de tennis aussi bien qu'électrons.

## A.2 Différentes sources de bruit

Dans cette partie, nous allons donner quelques exemples de sources de bruit bien connues. Le bruit est un sujet d'intérêt depuis longtemps, tant sur le plan fondamental qu'appliqué ; en effet, le bruit peut être particulièrement gênant pour les composants [43], et limiter leurs performances. Ainsi, l'obtention, par exemple, de transistors hyper-fréquences bas-bruit est devenu un enjeu pour l'industrie des télécommunications. De même, le problème du

---

<sup>5</sup>On appelle bruit à fréquence nulle le bruit à des fréquences  $f \ll 1/\tau$ , avec  $\tau$  le temps de transit des électrons.

bruit de grenaille dans les guides d'ondes optiques reste difficile à résoudre, et restera sans doute une des limitations fondamentales aux communications optiques. Enfin, le bruit basse-fréquence, ou bruit en  $1/f$ , limite la sensibilité de certains détecteurs [148, 164, 165] ou amplificateurs.

### A.2.1 Bruit thermique

La première source de bruit que nous allons regarder est due à l'agitation thermique des électrons dans un conducteur. Il s'agit d'un *bruit d'équilibre* : en 1928, Johnson et Nyquist [167, 168] montrèrent indépendamment qu'une résistance à la température  $T$  produisait un bruit en tension dont la densité spectrale vaut :

$$S_V = 4k_B\theta R\Delta f$$

Il s'agit donc d'un *bruit blanc* (indépendant de la fréquence), conséquence directe du théorème de fluctuation-dissipation (qui relie  $k_B\theta$  à  $R$ ).

Pour expliciter cette relation, nous allons utiliser la méthode de Langevin [169], qui permet de calculer le bruit à l'aide de circuits équivalents. Cette méthode a l'avantage de la simplicité, et est applicable à différentes sources de bruit ; par contre, elle peut cacher l'origine " physique " de certains phénomènes.

Considérons le circuit de la figure A.1 : une résistance et une inductance sont connectées à une source de bruit  $H(t)$ . Cette source représente les différentes sources de bruit thermique présentes dans le circuit, et disparaîtra de l'expression finale. L'équation différentielle qui régit ce circuit est donnée par :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = H(t) \quad (\text{A.1})$$

Écrivons  $H(t)$  et  $i(t)$  sous forme de séries de Fourier :

$$\begin{cases} H(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{j\omega_n t} \\ i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{j\omega_n t} \end{cases}$$

En reportant ce résultat dans la relation A.1, on obtient :

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{j\omega_n L + R}$$

De plus, par définition :

$$S_H(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\alpha_n \alpha_n^*} \text{ et } S_i(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\beta_n \beta_n^*}$$

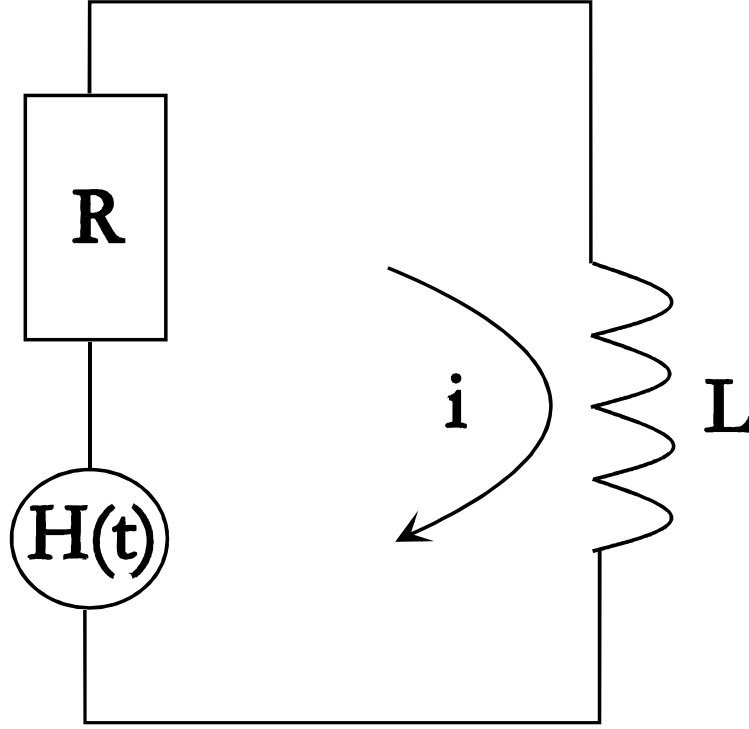


FIG. A.1 – Circuit résonant composé d’une inductance  $L$ , d’une résistance  $R$  et d’une source de bruit blanc  $H(t)$ . Cette source de bruit disparaîtra à la fin du calcul grâce au théorème d’équipartition de l’énergie.

Si on suppose que  $H(t)$  est une source de bruit blanc, i.e.  $S_H(f) = S_H(0)$ , on a alors :

$$S_i(f) = \frac{S_H(0)}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (\text{A.2})$$

Pour trouver  $S_H(0)$ , on peut évaluer la quantité  $\overline{i^2}$  :

$$\overline{i^2} = \int_0^\infty S_i(f) df = S_H(0) \int_0^\infty \frac{df}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{S_H(0)}{4RL} \quad (\text{A.3})$$

Le point central de la démonstration est d’utiliser le théorème d’équipartition de l’énergie. On obtient alors :

$$\frac{1}{2} L \overline{i^2} = \frac{1}{2} k_B \theta \Rightarrow \overline{i^2} = \frac{k_B \theta}{L}$$

En comparant ce résultat avec la relation A.3, on obtient :

$$\begin{aligned} S_H(0) &= 4k_B \theta R \\ S_i(f) &= \frac{4k_B \theta R}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

C'est la relation obtenue, d'une façon différente, par Johnson et Nyquist [167, 168] en 1932. La densité spectrale de bruit d'une résistance pure à la température  $\theta$  vaut donc :  $S_V = 4k_B\theta R$ , et il s'agit d'un bruit blanc jusqu'à la fréquence de coupure  $f = 1/\tau$ , avec  $\tau$  le temps de transit des électrons.

Ce bruit nous a servi de source de bruit blanc pour calibrer notre chaîne de mesure. Il nous a aussi permis d'obtenir une mesure absolue du bruit de grenaille dans notre expérience sur le contact ponctuel quantique. Mais il est aussi une source de bruit parasite dans notre montage expérimental : en effet, les résistances qui servent à polariser les *FET* d'entrée de nos amplificateurs, ainsi que la résistance de sortie de notre source de courant, génèrent toutes un bruit en courant qu'il faut prendre en compte, et rajouter au bruit de l'échantillon.

## A.2.2 Bruit basse fréquence

La plupart des phénomènes physiques présentent un bruit basse fréquence particulièrement important, avec souvent une dépendance en  $1/f$ . Ce phénomène très général est difficile à interpréter de façon quantitative, quoiqu'il soit possible d'en donner une explication qualitative satisfaisante. Nous l'avons étudié en détail dans le cas des boîtes quantiques utilisées comme électromètres [164] (cf. chapitre IV). Ici, nous allons donner un modèle qui permet de rendre compte de la dépendance en fréquence du bruit observée expérimentalement.

Considérons le bruit provoqué par l'émission ou l'absorption d'une charge par un défaut (bruit de génération-recombinaison). Ces charges vont faire varier la résistance du conducteur, soit directement en faisant varier la densité de porteurs, soit indirectement en faisant varier la charge électrique environnant une boîte quantique [18, 148, 164]. Le bruit provoqué par ces mouvements de porteurs est donc fondamentalement un bruit de résistance ; il faudra donc faire passer un courant pour le détecter. L'équation qui régit ces fluctuations du nombre de charges est donnée par :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -\frac{\Delta N}{\tau} + H(t)$$

Dans cette expression,  $H(t)$  est à nouveau une source de bruit, et  $\tau$  est le temps de vie d'un porteur créé par ce processus. Par analogie avec l'équation A.2,  $S_N(f)$  est donnée par :

$$S_N(f) = \frac{S_H(0)\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}$$

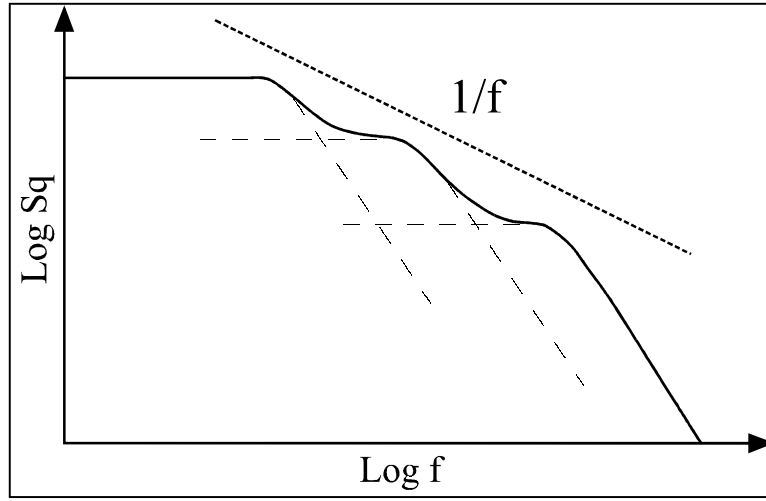


FIG. A.2 – Densité spectrale de bruit générée par un ensemble de systèmes à deux niveaux : chaque fluctuateur produit un bruit dont la densité spectrale est lorentzienne (courbes en pointillés). Si un grand nombre de fluctuateurs est activé, on tend vers une loi en  $1/f$  (courbe en trait plein).

En combinant cette expression avec le fait que :

$$\overline{\Delta N^2} = \int_0^\infty S_N(f) df = S_H(0) \tau \int_0^\infty \frac{\tau df}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{S_H(0) \tau}{4}$$

on obtient :

$$S_N(f) = 4\overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (\text{A.4})$$

Nous voyons donc que lorsqu'il n'y a qu'un défaut qui libère ou capture un électron, et ce avec un temps caractéristique  $\tau$ , la densité spectrale de bruit associé à ce phénomène a une forme lorentzienne. C'est ce que l'on appelle le *bruit télégraphique*, à cause du fait que dans ce cas, la conductance "switch" continuellement entre deux états avec un temps caractéristique  $\tau$ , reproduisant ainsi la forme d'un signal de télégraphe. Ce phénomène a été mis en évidence expérimentalement de façon indiscutable [18, 148, 164, 165].

Dans un échantillon, en général, il y a de nombreux pièges qui font varier le nombre de porteurs, avec une large distribution de temps caractéristiques. On observe du bruit télégraphique quand le signal est dominé par une seule impureté (par exemple si celle-ci est plus proche de la boîte quantique que les autres). Supposons que toutes les impuretés aient une influence égale, et des temps caractéristiques  $\tau$  donnés par une loi de distribution  $g(\tau)$ . Par

analogie avec la relation A.4, on peut écrire le bruit basse comme :

$$S_N(f) = 4\overline{\Delta N^2} \int_0^\infty \frac{\tau g(\tau) d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Si on prend comme distribution  $g(\tau) = \frac{\frac{1}{\tau} d\tau}{\ln(\frac{\tau_1}{\tau_0})}$  pour  $\tau_0 \preceq \tau \preceq \tau_1$ , on obtient :

$$S_N(f) = \frac{2\overline{\Delta N^2}}{\ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)} \left[ \frac{1}{\tan(\omega\tau_1)} - \frac{1}{\tan(\omega\tau_0)} \right]$$

Les cas limites donnent alors :

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \frac{2\overline{\Delta N^2}\tau_1}{\pi f \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)} \text{ pour } \omega \ll \frac{1}{\tau_1} \\ S_N(f) &= \frac{2\overline{\Delta N^2}}{f \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)} \text{ pour } \frac{1}{\tau_1} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau_0} \\ S_N(f) &= \frac{\frac{2\overline{\Delta N^2}}{\tau_0}}{\pi^2 f^2 \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)} \text{ pour } \omega \gg \frac{1}{\tau_0} \end{aligned}$$

On voit donc que le spectre est en  $1/f$  dans un large intervalle de fréquence (d'où le nom " bruit en  $1/f$  "). Les deux cross-over à  $f_1 = \frac{1}{4\tau_1}$  et  $f_2 = \frac{1}{\pi^2\tau_0}$  sont difficiles à observer expérimentalement, car  $f_1$  est très bas en fréquence et  $f_2$  tombe à des fréquences où on est dominé par le bruit blanc (bruit thermique ou bruit de grenaille). Si on suppose une loi activée thermiquement,  $1/\tau \propto e^{-\frac{E}{k_B\theta}}$  et une distribution uniforme de hauteurs de barrière (cf. figure A.2) dans l'intervalle  $[E_{\min}, E_{\max}]$ , on obtient une distribution de temps caractéristiques [43] :

$$g(\tau) = \frac{k_B\theta}{\tau(E_{\max} - E_{\min})}$$

Finalement, on obtient pour la densité spectrale de bruit :

$$S_N(f) = \frac{1}{2\pi f} \frac{k_B\theta}{(E_{\max} - E_{\min})}$$

Cette dépendance en  $1/f$  peut-être particulièrement gênante, non seulement à cause du fait que le niveau de bruit peut-être particulièrement élevé, mais aussi parce qu'il existe une coupure capacitive liée à la capacité des câbles coaxiaux et à l'impédance de l'échantillon. Pour observer le bruit blanc



que nous cherchons, il faudra donc trouver une “fenêtre” de fréquences dans laquelle on n’ait pas de bruit en  $1/f$  ni de coupure capacitive. C’est ce point qui a limité la portée des premières expériences faites sur le bruit de grenaille : les auteurs ont eu du mal à s’extraire du bruit en  $1/f$ , ce qui a empêché des comparaisons quantitatives avec la théorie [44]. La dépendance en courant du bruit basse fréquence peut être obtenue très simplement. Si on suppose que ce bruit est dû à un bruit en résistance [43, 46, 47], on peut écrire :

$$R = R_0 + \delta R(t)$$

avec  $R_0$  la résistance moyenne. Les fluctuations de courant deviennent  $\delta V(t) = I_0 \delta R(t)$ , avec  $I_0$  le courant de polarisation de l’échantillon. Comme le bruit est la transformée de Fourier de la fonction d’autocorrélation, on obtient :

$$S_V(f) = I_0^2 S_R(f)$$

On trouve donc une dépendance en  $I_0^2$  pour le bruit basse fréquence, que l’on peut écrire sous la forme :

$$S_V(f) = \frac{A}{f} I_0^2$$

Cependant, il faut bien noter que le courant n’est pas la cause de ce bruit, mais seulement une façon de le détecter.

## Conclusion

Dans cette annexe, nous avons introduit la notion de bruit, d’un point de vue mathématique, puis nous avons donné des exemples concrets des différentes sources de bruit que l’on trouve dans les systèmes “courants”. Plus qu’une illustration, ces bruits sont bien présents dans notre circuit : les amplificateurs ont une impédance d’entrée (qui sert à polariser les *FET*), et celle-ci produit un bruit en courant qui passe dans l’échantillon. Il en va de même pour la source de courant. De plus, les amplificateurs ont aussi du bruit en  $1/f$  dont le niveau peut-être très important. Tous ces bruits viendront donc s’ajouter au bruit que l’on veut mesurer, et donneront une limite fondamentale à la sensibilité de nos expériences.



# Annexe B

## Filtrage des radio-fréquences

### B.1 Différentes températures

Dans un échantillon à température ambiante, dans lequel la longueur de collision électron-phonon est très courte, les électrons sont thermalisés au réseau. À très basse température, ceci n'est vrai qu'au niveau des contacts ohmiques qui sont très désordonnés. L'“ environnement ” du gaz d'électrons peut se représenter de la façon suivante :

- Un bain de phonons, à la température imposée par le réfrigérateur.
- Un bain de photons, composé du rayonnement émis par les parois de la boîte expérimentale et des photons arrivant depuis les parties chaudes du cryostat *via* les câbles coaxiaux.

Nous avons vu que le bruit basse fréquence était dû à des défauts qui oscillaient entre deux états et nous en avons distingué trois sortes :

- Les charges résiduelles en surface.
- Les défauts atomiques aux interfaces ou les donneurs ionisés, qui peuvent former des systèmes à deux niveaux.
- Les “ boîtes quantiques ” involontaires, liées aux irrégularités du potentiel au bord du méso, et dont l'état de charge fluctue au cours du temps.

Comme tous ces défauts sont thermiquement activés, il est important de savoir à quel “ thermostat ” ils sont connectés. Les défauts atomiques sont naturellement thermalisés aux phonons. Par contre, il a été montré que le taux d'événements-tunnel dans une boîte quantique peut être exponentiellement augmenté par les modes électromagnétiques du circuit extérieur<sup>1</sup> [170]. De

---

<sup>1</sup>Ce phénomène devient particulièrement crucial lorsqu'on utilise des séries d'îlots métalliques à des fins métrologiques : l'effet-tunnel assisté par les photons devient alors la principale source d'erreur sur la mesure [171].

même, le mouvement des électrons par sauts entre impuretés peut être efficacement assisté par les photons : si le couplage électron-photon est beaucoup plus faible que le couplage électron-phonon, le nombre de photons arrivant sur l'échantillon *via* les câbles coaxiaux est exponentiellement plus grand [73].

Il est donc primordial, en particulier pour les mesures de bruit, que l'échantillon baigne dans un environnement électromagnétique dont la température soit la plus proche possible de la température de base du réseau cristallin imposée par le réfrigérateur.

## B.2 Atténuation

Le bruit électromagnétique véhiculé par les fils arrivant sur l'échantillon peut être représenté par le bruit thermique d'une impédance  $R$  connecté à l'échantillon par des fils parfaits.

La puissance de bruit générée vaut :

$$\frac{S_V(\omega)}{R} = \frac{4\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B\theta}\right) - 1}$$

À basse fréquence ( $\hbar\omega \ll k_B\theta$ ), on retrouve bien le bruit thermique habituelle  $4k_B\theta$  [167, 168]. Pour une température de  $300K$ , le bruit est blanc jusqu'à une fréquence de  $6THz$ .

Pour amener la température des photons à la température de l'échantillon, l'atténuation vaut :

$$A(\omega) = \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B\theta_{Ech.}}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B\theta_0}\right) - 1}$$

où  $\theta_{Ech.}$  est la température de l'échantillon et  $\theta_0$  la température ambiante.

Tant que  $\hbar\omega \ll k_B\theta_{Ech.} \ll k_B\theta_0$ , l'atténuation se réduit à :

$$A(\omega) \simeq \frac{\theta_0}{\theta_{Ech.}}$$

c'est à dire un facteur  $1.5 \cdot 10^4$  pour  $\theta_{Ech.} = 20mK$  et  $\theta_0 = 300K$ . Par contre, pour des fréquences élevées,  $k_B\theta_{Ech.} \ll \hbar\omega \ll k_B\theta_0$ , on trouve une atténuation qui vaut :

$$A(\omega) \simeq \frac{k_B\theta_0}{\hbar\omega} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B\theta_{Ech.}}\right)$$

Pour le rayonnement à  $1K$  ( $20GHz$ ), on trouve une atténuation de  $1.5 \cdot 10^{24}$  !

Finalement, on retiendra de ces ordres de grandeur qu'à haute fréquence, l'atténuation désirée croît exponentiellement avec la fréquence. Il faut donc disposer de filtres efficaces dans un large domaine du spectre.

## B.3 Systèmes de filtrage

### B.3.1 Filtres discrets

Les filtres habituellement utilisés sont construits à partir d'éléments discrets, capacités, inductances et résistances. Ceux-ci présentent l'intérêt d'être très simples à utiliser, placés, par exemple, en tête d'une canne à dilution.

Cependant, leur utilisation devient problématique à haute fréquence pour deux raisons. Tout d'abord, il est difficile d'un point de vue technologique de réaliser de très grandes inductances et capacités. Ensuite, ce type de circuits recèle des inductances et des capacités parasites qui font chuter l'atténuation à haute fréquence. Ils ne sont donc réellement efficaces que dans le domaine du mégahertz.

Pour obtenir une atténuation importante des hyperfréquences, il faut adopter une technique de filtres continus.

### B.3.2 Lignes coaxiales

Une ligne coaxiale possède une impédance en ligne  $Z = R + jL\omega$  et une impédance vers la masse  $Y = G + jC\omega$ . L'équation qui régit la propagation d'une onde électromagnétique est donnée par [172] :

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \gamma^2 V$$

où  $\gamma^2 = ZY$ . L'atténuation est représentée par la partie imaginaire de  $\gamma$  :

$$\alpha = \Im m[\gamma] = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} + \frac{G\sqrt{L/C}}{2}$$

Dans le cas où l'impédance de fuite est négligeable,  $RC \gg GL$ , et en notant  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  l'impédance caractéristique du câble coaxial, on obtient une atténuation :

$$A(\omega) = e^{-\frac{R}{2Z_0}}$$

Pour atténuer d'un facteur  $10^{24}$  le mode à  $1K$ , il faudrait une résistance d'environ  $5500\Omega$  pour un mètre de câble d'impédance caractéristique  $50\Omega$ . Compte tenu du fait que l'atténuation doit croître exponentiellement avec la

fréquence, on atteindrait très vite avec cette méthode des valeurs énormes et inenvisageables pour la résistance des fils de mesure.

Heureusement, la résistance du câble coaxiale augmente “naturellement” avec la fréquence à cause de l’“effet de peau” : le courant se répartit à l’intérieur d’un cylindre creux d’épaisseur  $\delta$ ,  $\delta$  étant l’“épaisseur de peau” :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}}$$

où  $\omega$  est la fréquence,  $\mu$  la perméabilité magnétique et  $\sigma$  la conductivité à fréquence nulle. Lorsque  $\delta$  devient petit devant le rayon du conducteur, la section qui conduit devient proportionnelle à  $1/\delta$  et la résistance varie donc comme  $\sqrt{\omega}$ . L’atténuation devient alors :

$$A(\omega) = e^{-\frac{R}{Z_0}\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

où  $\omega_0$  est une fréquence de coupure qui correspond au moment où l’épaisseur de peau est comparable au rayon du conducteur.

Un câble coaxial véhicule de plus des modes transverses électriques et magnétiques (modes  $TE$  et  $TM$ ). Leur fréquence de coupure correspond à mettre une longueur d’onde dans la circonférence du câble<sup>2</sup>. Si on veut empêcher la propagation de tous les modes jusqu’à  $300K$  ( $20GHz$ ), il faudrait un diamètre maximum de  $6\mu m$ , ce qui est difficile à réaliser pratiquement.

Les câbles coaxiaux que nous avons utilisés dans nos expériences [73] sont constitués d’une âme en manganin de  $30\mu m$  de diamètre entourée de polymide, le tout dans une gaine en inox. L’ensemble est écrasé sous presse<sup>3</sup>, afin d’augmenter la capacité vers la masse et la fréquence de coupure des modes  $TE$  et  $TM$ . Finalement, la capacité vers la masse est de  $100pF/m$  et l’inductance de  $250nH/m$ , ce qui donne une impédance caractéristique  $Z_0 \simeq 50\Omega$ . La résistance à fréquence nulle est de  $520\Omega/m$ .

En prenant pour les constantes  $\mu \simeq \mu_0$  et  $\sigma = 2.7 \cdot 10^6 S/m$ , on obtient pour l’atténuation :

$$A(\omega) = e^{-2.6\sqrt{\frac{\omega[GHz]}{3.14}}}$$

La radiation à  $20GHz$  ( $1K$ ), par exemple, est atténuée d’un facteur  $1.4 \cdot 10^7$  pour un mètre de câble coaxial. Le plus petit diamètre intérieur du tube étant

---

<sup>2</sup>Plus précisément, la fréquence de coupure est donnée par :

$$f_c = \frac{c}{2.9} \sqrt{\varepsilon} (r_1 + r_2)$$

où  $r_1$  est le diamètre de l’âme et  $r_2$  le diamètre intérieur de la gaine, et  $\varepsilon$  la constante diélectrique du matériau.

<sup>3</sup>On applique une pression d’environ  $200kg/cm$ .

de  $50\mu m$ , le premier mode  $TE$  à se propager est à  $0.8THz$  ( $40K$ ). Enfin, d'un point de vue cryogénique, le fonctionnement du réfrigérateur n'est pas notablement affecté.

Les filtres coaxiaux que nous avons mis au point ne sont pas idéaux, mais constituent un des systèmes les plus efficaces et les mieux adaptés aux expériences de physique mésoscopique [73, 163, 170]. L'utilisation de  $50cm$  de ce type de câble coaxial, entre  $4.2K$  et  $20mK$ , permet d'atténuer suffisamment le rayonnement thermique parasite et d'obtenir une température effective des électrons de  $40mK$ .





## Références bibliographiques



# Bibliographie

- [1] R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 223 (1957)
- [2] R. Landauer, in *Coulomb and Interference Effects in Small Electronic Structures*, D. C. Glatthi, M. Sanquer and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (1994)
- [3] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel and C. T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988)
- [4] D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie and G. A. C. Jones, *J. Phys. C* **21**, 209 (1988)
- [5] L. P. Lévy, G. Dolan and H. Bouchiat, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2074 (1990)
- [6] L. P. Lévy, *Physica B* **169**, 245 (1991)
- [7] D. Mailly, C. Chapelier and A. Benoit, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2020 (1993)
- [8] R. Webb, S. Washburn, C. Umbach and R. Laibowitz, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2696 (1985)
- [9] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, *Nature* **177**, 27 (1956)
- [10] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, *Proc. Roy. Soc. A* **242**, 300 (1957)
- [11] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, *Proc. Roy. Soc. A* **243**, 291 (1958)
- [12] G. B. Lesovik, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Phys.* **49**, 513 (1989) [*JETP Lett.* **49**, 592 (1989)]
- [13] M. Büttiker, *Phys. Rev. B* **46**, 12485 (1992)
- [14] T. Martin and R. Landauer, *Phys. Rev. B* **45**, 1742 (1992)
- [15] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605 (1983)
- [16] C. L. Kane and Matthew P. A. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 724 (1994)
- [17] R. A. Millikan, *Phys. Rev.* **32**, 349 (1911)
- [18] SETTRON/ESPRIT Project 9005, *Periodic Progress Reports 1994/95 et 1995/96*

- [19] V. Bouchiat, G. Chardin, M. H. Devoret and D. Esteve, à paraître dans *Hyp. Int.*
- [20] M. W. Keller, J. M. Martinis, N. M. Zimmerman and A. H. Steinbach, *Appl. Phys. Lett.* **69**, 1804 (1996)
- [21] S. Tiwari, F. Rana, K. Chan, H. Hanafi, W. Chan and D. Buchanan, *IEDM* **95**, 521 (1995)
- [22] J. J. Welser, Sandip Tiwari, S. Rishton, K. Y. Lee and Y. Lee, *IEEE Elec. Dev. Lett.* **18**, 278 (1997)
- [23] P. Charlat, H. Courtois, Ph. Gandit, D. Mailly, A. F. Volkov and B. Pannetier, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4950 (1996)
- [24] H. Takayanagi, J. B. Hansen and J. Nitta, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 162 (1995)
- [25] W. Poirier, M. Sanquer and D. Mailly, in *Correlated Fermions and Transport in Mesoscopic Systems*, T. Martin, G. Montambaux and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (1996)
- [26] W. Poirier, D. Mailly and M. Sanquer, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2105 (1997)
- [27] L. Esaki and R. Tsu, *Internal Report RC 2418*, IBM Research, March 26<sup>th</sup> (1969)
- [28] B. Etienne and V. Thierry-Mieg, *Appl. Phys. Lett.* **52**, 1237 (1988)
- [29] Frank Stern, *Appl. Phys. Lett.* **43**, 974 (1983)
- [30] P. Grousset, *Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse* (1996)
- [31] Y. Jin, *Solid-St. Electron.* **34**, 117 (1991)
- [32] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1976)
- [33] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons, New York (1976)
- [34] Y. Ma, R. Fletcher, E. Zaremba, M. D'Iorio, C. T. Foxon and J. J. Harris, *Phys. Rev. B* **43**, 9033 (1991)
- [35] H. Bouchiat, in *Mesoscopic Quantum Physics*, E. Akkermans, G. Montambaux, J. L. Pichard and J. Zinn-Justin eds., Elsevier Science, Amsterdam (1994)
- [36] C. W. J. Beenakker and H. van Houten, *Sol. St. Phys.* **44**, 1 (1991)
- [37] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics*, non publié
- [38] R. Landauer, *Philos. Mag.* **21**, 863 (1970)
- [39] C. Pasquier, *Thèse de l'Université Paris XI* (1994)

- [40] D. Mailly, *Transport Quantique dans des Nanostructures Artificielles*, non publié
- [41] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer and S. Pinhas, *Phys. Rev. B* **31**, 6207 (1985)
- [42] W. Schottky, *Ann. Physik* **57**, 541 (1918)
- [43] A. van der Ziel, *Noise in Solid State Devices and Circuits*, Wiley, New-York (1986)
- [44] Y. P. Li, D. C. Tsui, J. J. Heremans and J. A. Simmons, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 774 (1990)
- [45] S. Washburn, R. J. Haug, K. Y. Lee and J. M. Hong, *Phys. Rev. B* **44**, 3875 (1991)
- [46] F. Liefrink, J. I. Dijkhuis, M. J. M. de Jong, L. W. Molenkamp and H. van Houten, *Phys. Rev. B* **49**, 14066 (1994)
- [47] F. Liefrink, A. J. Scholten, C. Dekker, R. Eppenga, H. van Houten and C. T. Foxon, *Physica B* **175**, 213 (1991)
- [48] L. Saminadayar, A. Kumar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, à paraître dans *J. Phys. IV France*
- [49] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Clarendon, Oxford (1973)
- [50] L. Kouwenhoven, *Science* **271**, 1689 (1996)
- [51] V. A. Khlus, *Zh. Eksp. Teor. Phys.* **93**, 2179 (1987) [*JETP* **66**, 1243 (1987)]
- [52] R. Landauer, *Physica D* **38**, 226 (1989)
- [53] T. Martin, in *Coulomb and Interference Effects in Small Electronic Structures*, D. C. Glattli, M. Sanquer and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (1994)
- [54] M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2901 (1990)
- [55] M. Büttiker, *Physica B* **175**, 199 (1991)
- [56] R. Landauer, *Physica B* **227**, 156 (1996)
- [57] K. W. H. Stevens, *J. Phys. C* **20**, 5791 (1987)
- [58] M. Reznikov, M. Heiblum, Hadas Shtrikman and D. Mahalu, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3340 (1995)
- [59] M. Reznikov, M. Heiblum, Hadas Shtrikman and D. Mahalu, *Surf. Sci.* **361/362**, 726 (1996)
- [60] A. Kumar, L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, in *Correlated Fermions and Transport in Mesoscopic Systems*, T. Martin, G. Montambaux and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (1996)

- [61] M. J. M. de Jong, *Thèse de Doctorat de l'Université de Leiden* (1995)
- [62] C. W. J. Beenakker and M. Büttiker, *Phys. Rev. B* **46**, 1889 (1992)
- [63] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **46**, 13400 (1992)
- [64] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, in *Coulomb and Interference Effects in Small Electronic Structures*, D. C. Glattli, M. Sanquer and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (1994)
- [65] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, in *Mesoscopic Electron Transport*, L. P. Kouwenhoven, G. Schoen and L. L. Sohn eds., Kluwer Academic Press, Dordrecht (1997)
- [66] C. W. J. Beenakker, in *Mesoscopic Quantum Physics*, E. Akkermans, G. Montambaux, J. L. Pichard and J. Zinn-Justin eds., Elsevier Science, Amsterdam (1994)
- [67] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **49**, 16070 (1994)
- [68] T. Martin, *Phys. Lett. A* **220**, 137 (1996)
- [69] P. Fendley, A. W. W. Ludwig and H. Saleur, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2196 (1995)
- [70] P. Fendley, A. W. W. Ludwig and H. Saleur, *Phys. Rev. B* **52**, 8934 (1995)
- [71] B. Etienne, *Cours du DEA de Sciences des Matériaux*, École doctorale de la région Parisienne (1996)
- [72] A. Kumar, S. E. Laux and F. Stern, *Appl. Phys. Lett.* **54**, 1270 (1989)
- [73] D. C. Glattli, P. Jacques, A. Kumar, P. Pari and L. Saminadayar, *J. Appl. Phys.* **81**, 7350 (1997)
- [74] S. Washburn, R. J. Haug, K. Y. Lee and J. M. Hong, *Phys. Rev. B* **44**, 3875 (1991)
- [75] A. Kumar, L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, *Physica B* **227**, 161 (1996)
- [76] A. Kumar, L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2778 (1996)
- [77] A. Steinbach, J. Martinis and M. H. Devoret, *Bull. Am. Phys. Soc.* **40**, 400 (1995)
- [78] Andrew H. Steinbach, John M. Martinis and Michel H. Devoret, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3806 (1996)
- [79] K. v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980)

- [80] Klaus von Klitzing, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 519 (1986)
- [81] D. C. Tsui, H. L. Störmer and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982)
- [82] H. L. Störmer, A. M. Chang, D. C. Tsui, J. C. M. Hwang, A. C. Gossard and W. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1953 (1983)
- [83] A. M. Chang, P. Berglund, D. C. Tsui, H. L. Störmer and J. C. M. Hwang, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 997 (1984)
- [84] A. H. MacDonald, in *Mesoscopic Quantum Physics*, E. Akkermans, G. Montambaux, J. L. Pichard and J. Zinn-Justin eds., Elsevier Science, Amsterdam (1994)
- [85] Tsuneya Ando, Alan B. Fowler and Frank Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982)
- [86] P. Pfeffer and W. Zawadzki, *Phys. Rev. B* **41**, 1561 (1990)
- [87] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* **23**, 5632 (1981)
- [88] R. E. Prange, *Phys. Rev. B* **23**, 4802 (1981)
- [89] B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **25**, 2185 (1982)
- [90] A. H. MacDonald and P. Streda, *Phys. Rev. B* **29**, 1616 (1984)
- [91] X. G. Wen, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2206 (1990)
- [92] Xiao-Gang Wen, *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 1711 (1992)
- [93] J. J. Palacios and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 118 (1996)
- [94] K. Moon, H. Yi, C. L. Kane, S. M. Girvin and Matthew P. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4381 (1993)
- [95] Scot R. Renn and Daniel P. Arovas, *Phys. Rev. B* **51**, 16832 (1995)
- [96] P. Fendley, A. W. W. Ludwig and H. Saleur, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3005 (1995)
- [97] A. M. Chang, L. N. Pfeiffer and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2538 (1996)
- [98] F. P. Milliken, C. P. Umbach and R. A. Webb, *Solid State Commun.* **97**, 309 (1996)
- [99] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii and L. I. Glazman, *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992)
- [100] D. B. Chklovskii, K. A. Matveev and B. I. Shklovskii, *Phys. Rev. B* **47**, 12605 (1993)
- [101] Dimitri B. Chklovskii, *Phys. Rev. B* **51**, 9895 (1995)
- [102] M. Büttiker, *Phys. Rev. B* **38**, 9375 (1988)

- [103] Thierry Martin and Shechao Feng, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1971 (1990)
- [104] Thierry Martin and Shechao Feng, *Phys. Rev. B* **44**, 9084 (1991)
- [105] C. L. Kane and Matthew P. A. Fisher, *Phys. Rev. B* **46**, 7268 (1992)
- [106] J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989)
- [107] D. Weiss, M. L. Roukes, A. Menschig, P. Grambow, K. von Klitzing and G. Weimann, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2790 (1991)
- [108] W. Kang, H. L. Störmer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3850 (1993)
- [109] J. K. Jain, *Science* **266**, 1199 (1994)
- [110] V. J. Goldman, B. Su and J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2065 (1994)
- [111] J. H. Smet, D. Weiss, R. H. Blick, G. Lütjering, K. von Klitzing, R. Fleischmann, R. Ketzmerick, T. Geisel and G. Weimann, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2272 (1996)
- [112] R. L. Willett, *Semicond. Sci. Technol.* **12**, 495 (1997)
- [113] S. M. Girvin, in *Correlated Fermions and Transport in Mesoscopic Systems*, T. Martin, G. Montambaux and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (1996)
- [114] D. C. Glattli and C. Pasquier, in *Mesoscopic Quantum Physics*, E. Akkermans, G. Montambaux, J. L. Pichard and J. Zinn-Justin eds., Elsevier Science, Amsterdam (1994)
- [115] Robert B. Laughlin, in *The Quantum Hall Effect*, Richard E. Prange and Steven M. Girvin eds., Springer-Verlag, New-York (1987)
- [116] S. A. Trugman and S. Kivelson, *Phys. Rev. B* **31**, 5280 (1985)
- [117] A. M. Chang, in *The Quantum Hall Effect*, Richard E. Prange and Steven M. Girvin eds., Springer-Verlag, New-York (1987)
- [118] G. S. Boebinger, A. M. Chang, H. L. Störmer and D. C. Tsui, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1606 (1985)
- [119] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605 (1983)
- [120] A. H. MacDonald and S. M. Girvin, *Phys. Rev. B* **33**, 4414 (1986)
- [121] A. H. MacDonald and S. M. Girvin, *Phys. Rev. B* **34**, 5639 (1986)
- [122] Seigo Tarucha, Takashi Honda and Tadashi Saku, *Solid State Commun.* **94**, 413 (1995)
- [123] A. Yacoby, H. L. Störmer, Ned S. Wingreen, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4612 (1996)
- [124] Y. Katayama, D. C. Tsui and M. Shayegan, *Phys. Rev. B* **49**, 7400 (1994)



- [125] D. G. Polyakov and B. I. Shklovskii, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 150 (1995)
- [126] S. I. Dorozhkin, R. J. Haug, K. von Klitzing and H. Ploog, *Phys. Rev. B* **51**, 14729 (1995)
- [127] V. J. Goldman and B. Su, *Science* **267**, 1010 (1995)
- [128] V. J. Goldman, *Surf. Sci.* **361/362**, 1 (1996)
- [129] J. D. F. Franklin, I. Zailer, C. J. B. Ford, P. J. Simpson, J. E. F. Frost, D. A. Ritchie, M. Y. Simmons and M. Pepper, *Surf. Sci.* **361/362**, 17 (1996)
- [130] Eyal Goldmann and Scot R. Renn, soumis à *Phys. Rev. B*
- [131] Charles L. Kane and Matthew P. A. Fisher, *Nature* **389**, 119 (1997)
- [132] P. Fendley and H. Saleur, *Phys. Rev. B* **54**, 10845 (1996)
- [133] C. L. Kane and Matthew P. A. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1220 (1992)
- [134] C. L. Kane and Matthew P. A. Fisher, *Phys. Rev. B* **46**, 15233 (1992)
- [135] Matthew P. A. Fisher and Leonid I. Glazman, in *Mesoscopic Electron Transport*, L. Kowenhoven, G. Schoen and L. Sohn eds., Kluwer Academic Press, Dordrecht (1997)
- [136] H. J. Schultz, in *Mesoscopic Quantum Physics*, E. Akkermans, G. Montambaux, J. L. Pichard and J. Zinn-Justin eds., Elsevier Science, Amsterdam (1994)
- [137] I. Safi-Taktak, *Thèse de l'École Polytechnique* (1996)
- [138] C. de C. Chamon, D. E. Freed and X. G. Wen, *Phys. Rev. B* **51**, 2363 (1995)
- [139] C. de C. Chamon, D. E. Freed and X. G. Wen, *Phys. Rev. B* **53**, 4033 (1996)
- [140] L. Saminadayar, D. C. Glatthli, Y. Jin and B. Etienne, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2526 (1997)
- [141] L. Saminadayar, D. C. Glatthli, Y. Jin and B. Etienne, soumis à *Physica B*
- [142] R. de-Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin and D. Mahalu, *Nature* **389**, 162 (1997)
- [143] I. Safi, à paraître dans *Phys. Rev. B*
- [144] W. P. Su and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 738 (1981)
- [145] Z. Borsosfoldi, M. Rahman, I. A. Larkin, A. R. Long, J. H. Davies, J. M. R. Weaver, M. C. Holland and J. G. Williamson, *Appl. Phys. Lett.* **66**, 3666 (1995)

- [146] R. J. Haug, M. Dilger, T. Schmidt, R. H. Blick, K. v. Klitzing and K. Eberl, *Physica B* **227**, 82 (1996)
- [147] T. Hiramoto, H. Ishikuro, T. Fujii, T. Saraya, G. Hashiguchi and T. Ikoma, *Physica B* **227**, 95 (1996)
- [148] V. Bouchiat, *Thèse de l'Université de Paris VI* (1997)
- [149] C. Pasquier, U. Meirav, F. I. B. Williams, D. C. Glatthli, Y. Jin and B. Etienne, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 69 (1992)
- [150] C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **44**, 1646 (1991)
- [151] R. C. Ashoori, *Nature* **379**, 413 (1996)
- [152] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique*, Hermann, Paris (1973)
- [153] A. Kumar, S. E. Laux and F. Stern, *Phys. Rev. B* **42**, 5166 (1990)
- [154] A. Kumar, *Surf. Sci.* **263**, 335 (1992)
- [155] P. L. McEuen, E. B. Foxman, Jari Kinaret, U. Meirav, M. A. Kastner, Ned S. Wingreen and S. J. Wind, *Phys. Rev. B* **45**, 11419 (1992)
- [156] M. Stopa, *Phys. Rev. B* **54**, 13767 (1996)
- [157] O. Klein, C. de C. Chamon, D. Tang, D. M. Abusch-Magder, U. Meirav, X. G. Wen, M. A. Kastner, S. J. Wind, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 785 (1995)
- [158] E. B. Foxman, U. Meirav, P. L. McEuen, M. A. Kastner, O. Klein, P. A. Belk, D. M. Abusch and S. J. Wind, *Phys. Rev. B* **50**, 14193 (1994)
- [159] M. Devoret, D. Estève and C. Urbina, in *Mesoscopic Quantum Physics*, E. Akkermans, G. Montambaux, J. L. Pichard and J. Zinn-Justin eds., Elsevier Science, Amsterdam (1994)
- [160] D. C. Glatthli, C. Pasquier, U. Meirav, F. I. B. Williams, Y. Jin and B. Etienne, *Z. Phys. B* **85**, 375 (1991)
- [161] D. C. Glatthli, *Physica B* **189**, 88 (1993)
- [162] H. Birk, M. J. M. de Jong and C. Schönenberger, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1610 (1995)
- [163] A. B. Zorin, *Rev. Sci. Instrum.* **66**, 4296 (1994)
- [164] L. Saminadayar, P. Grousset, A. Kumar and D. C. Glatthli, soumis à *J. Appl. Phys.*
- [165] A. B. Zorin, F. J. Ahlers, J. Niemeyer, T. Weimann, H. Wolf, V. A. Kruperin and S. V. Lotkhov, *Phys. Rev. B* **53**, 13682 (1996)
- [166] G. Zimmerli, T. M. Eiles, R. L. Kautz and John M. Martinis, *Appl. Phys. Lett.* **61**, 237 (1992)

- [167] J. B. Johnson, *Phys. Rev.* **32**, 97 (1928)
- [168] H. Nyquist, *Phys. Rev.* **32**, 110 (1928)
- [169] P. Langevin, *Compt. Rend.* **146**, 530 (1908)
- [170] D. Vion, P. F. Orfila, P. Joyez, D. Esteve and M. H. Devoret, *J. App. Phys.* **77**, 2519 (1995)
- [171] J. M. Martinis and M. Nahum, *Phys. Rev. B* **48**, 18316 (1993)
- [172] Simon Ramo, John R. Whinnery and Theodore van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, John Wiley & Sons, New York (1984)



## Liste de publications



## ***Publications relatives à l'observation des quasiparticules de charge fractionnaire***

- **L. Saminadayar**, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, “ Observation of the  $e/3$  Fractionally Charged Laughlin Quasiparticles ”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2526 (1997)
- D. C. Glattli, **L. Saminadayar** et Y. Jin, “ Un tiers d’électron ”, *Pour la Science* **241**, 24 (1997)
- **L. Saminadayar**, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, “ Observation of  $e/3$  fractionally charged quasiparticles ”, *Physica B* **249**, 401 (1998)
- **L. Saminadayar**, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, “ Observation of Fractionally Charged Quasiparticles ”, in *Quantum Physics at Mesoscopic Scale*, C. Glattli, M. Sanquer and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (2000)
- D. C. Glattli et **L. Saminadayar**, “ Observation de quasi-particules de charge fractionnaire  $e/3$  ”, *Images de la physique 1999*, p. 8-14 (2000)
- **L. Saminadayar**, “ Le bruit des charges fractionnaires ”, *Pour la Science* **289**, 30 (2001)

## ***Publications relatives à la mesure de la réduction du bruit de grenaille dans un contact ponctuel quantique***

- A. Kumar, **L. Saminadayar**, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, “ Experimental Test of the Quantum Shot Noise Reduction Theory ”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2778 (1996)
- A. Kumar, **L. Saminadayar**, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, “ Measurement of reduced shot noise in a quantum point contact ”, *Physica B* **227**, 161 (1996)
- D. C. Glattli, A. Kumar, **L. Saminadayar**, Y. Jin and B. Etienne, “ Observation of the Quantum Shot Noise reduction ”, in *Correlated fermions and transport in mesoscopic systems*, T. Martin, G. Montambaux and J. Trân Thanh Vân eds., Frontières, Gif-sur-Yvette (1996)
- M. Reznikov, R. de Picciotto, M. Heiblum, D. C. Glattli, A. Kumar and **L. Saminadayar**, “ Quantum Shot Noise ”, *Superlattices and Microstructures* **23**, 901 (1998)
- **L. Saminadayar**, A. Kumar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, “ Reduction of Shot Noise in Quantum Conductors ”, *J. Phys. IV France* **9**, 23 (1999)

### ***Publication relative à la mesure du bruit basse fréquence dans une boîte quantique***

- **L. Saminadayar**, P. Grousset, A. Kumar and D. C. Glattli, “ Extrinsic Charge Noise in Quantum Dots ”, soumis à *J. Appl. Phys.*

### ***Publication relative à la technique expérimentale***

- D. C. Glattli, P. Jacques, A. Kumar, P. Pari and **L. Saminadayar**, “ A noise detection scheme with  $10mK$  noise temperature resolution for semiconductor single electron tunneling devices ”, *J. Appl. Phys.* **81**, 7350 (1997)

### ***Autres publications***

- J. Y. Duboz, **L. Saminadayar** and J. M. Gérard, “ Effect of asymmetric barriers on performances of GaAs/AlGaAs quantum well detectors ”, *J. Appl. Phys.* **78**, 2803 (1995)
- P. Grousset, A. Kumar, **L. Saminadayar**, P. Debray, B. Etienne, Y. Jin and D. C. Glattli, “ Four-leads measurements on zero-dimensional electron gas ”, en préparation
- **L. Saminadayar**, “ Fondamentalement pragmatique ”, *Le Monde de l'Éducation* **261**, 78 (1998)



**Résumé :** dans un conducteur mésoscopique, le transport du courant se fait de façon cohérente : l'onde associée aux électrons garde une phase bien définie, ce qui permet d'observer des effets d'interférence électronique. Le transport dans ce régime a été largement étudié depuis une décennie, et les grandes lignes en sont bien comprises. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à un autre aspect du transport quantique, les mesures de bruit. Il s'agit de détecter les *fluctuations* du courant autour de sa valeur moyenne.

Notre travail est divisé en trois parties : tout d'abord, nous avons mesuré le *bruit de grenaille* dans un contact ponctuel quantique. Le bruit de grenaille est lié à la granularité de la charge. Dans un conducteur classique, il est directement relié au courant. Nous avons montré que dans un conducteur quantique, comme un contact ponctuel quantique, les corrélations quantiques dues au principe de Pauli réduisent le bruit de grenaille, et peut même l'annuler dans certaines conditions.

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé le fait que le bruit de grenaille soit sensible à la charge des porteurs pour détecter les quasiparticules de charge fractionnaire de l'effet Hall quantique fractionnaire. L'existence de ces quasiparticules avait été prédite dès 1983, mais aucune observation expérimentale n'avait été rapportée jusqu'alors. En induisant un courant de quasiparticules entre les deux bords d'un échantillon en régime d'effet Hall quantique fractionnaire, et en mesurant le bruit associé, nous avons montré que celui-ci vaut  $S_I = 2(e/3)I$ . Il s'agit donc d'une mesure directe de la charge fractionnaire des porteurs du courant en régime d'effet Hall quantique fractionnaire, qui vaut  $e^* = e/3$ , comme prévu par la théorie.

Enfin, la troisième partie de la thèse est consacrée à un sujet plus proche de la physique appliquée, la mesure du bruit basse fréquence dans des boîtes quantiques. Les systèmes quantiques commencent à être étudiés en vue d'applications, et il est donc essentiel de caractériser leur bruit basse fréquence (bruit en «  $1/f$  »). Nous avons montré que celui-ci est dû à des charges se déplaçant sur le substrat à proximité de la boîte, et que l'amélioration des caractéristiques de bruit de ces dispositifs passait donc par un important travail sur les substrats.

**Abstract :** In a mesoscopic conductor, the transport of current is coherent : the associated wave of the electrons keeps a well defined phase, so that one can observe interference effects. Transport in this regime has been extensively studied in the last decade, and the main features are well understood. In this thesis, we did focus on another aspect of the quantum transport, the noise. The purpose is to detect the *fluctuations* of the current around its average value.

Our work is divided in three parts : first, we have measured *shot noise* in a quantum point contact. Shot-noise is due to the granularity of the charge. In a classical conductor, it is directly related to the current. We have shown that in a quantum conductor, such as a quantum point contact, quantum correlation due to the Pauli principle reduce the shot-noise, and that it can even be suppressed under certain conditions.

In a second part, we did use the fact that shot-noise is sensitive to the charge of the carriers to detect the fractionally charged quasiparticles of the quantum Hall effect. The existence of the quasiparticles has been predicted since 1983, but no experimental observation has been reported up to now. By inducing a current of quasiparticles between the two edges of a sample in the fractional quantum Hall effect regime, and by measuring the noise associated with this current, we have proved it to be  $S_I = 2(e/3)I$ . This is actually a direct measurement of the charge of the carriers in the fractional quantum Hall regime, which is found to be  $e^* = e/3$  as predicted by the theory.

Finally, the third part of our work is devoted to a subject closer to the applied physics, namely the measurement of low frequency noise in quantum dots. As quantum systems are more and more studied for potential applications, it is crucial to characterize the low frequency noise («  $1/f$  » noise). We have found that this is due to free charges moving on the substrate around the dot, and that any improvement of the noise of such systems goes through an improvement of the substrates.

# Laurent Saminadayar

---

***Maître de Conférences, Université Joseph Fourier, Grenoble***

## **Adresses**

CNRS/CRTBT  
25, Avenue des Martyrs  
B. P. 166 X  
38042 Grenoble Cedex 09, France  
Tél. : + 33 (0)4 76 88 12 79  
Fax : + 33 (0)4 76 87 50 60  
saminadayar@grenoble.cnrs.fr

6, rue Denfert Rochereau  
38000 Grenoble, France  
Tél. : + 33 (0)4 76 85 26 59  
+ 33 (0)6 79 66 30 28  
Fax : + 33 (0)4 76 85 11 19  
Né le 04 septembre 1971, marié

---

## **Expériences professionnelles**

### **Recherche**

**Depuis 1997** Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, CNRS, Grenoble.

**1994-1997** Commissariat à l'Énergie Atomique, Saclay.

**1994** Laboratoire Central de Recherches, Thomson - CSF, Orsay.

### **Enseignement**

**Depuis 1998 Maître de Conférences**, Université Joseph Fourier, Grenoble.

**1997-1998 Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche**, Université Joseph Fourier, Grenoble.

**1994-1997 Allocataire Moniteur**, Université de Paris XI, Orsay.

## **Cursus universitaire**

**1997** Thèse de Doctorat, Université de Paris XI, mention très honorable avec les félicitations du jury.

**1994** DEA de Physique des Solides, Université de Paris VI.

**1993** Maîtrise de Physique fondamentale, University of Sussex, Brighton, UK.

## **Distinctions**

Prix Daniel Guinier 1997 de la Société Française de Physique.

## Publications dans des revues « spécialisées »

1. F. Schopfer, C. Bäuerle, W. Rabaud and **L. Saminadayar**, « Electron Coherence in Mesoscopic Kondo Wires », *Adv. in Solid State Phys.* **43**, 181 (2003)
2. **L. Saminadayar**, C. Bäuerle and D. Mailly, « Equilibrium properties of mesoscopic conductors », in *Encyclopedia of Nanosciences*, H. S. Nalwa eds. (2003)
3. F. Schopfer, C. Bäuerle, W. Rabaud and **L. Saminadayar**, « Anomalous temperature dependence of the dephasing time in mesoscopic Kondo wires », *Phys. Rev. Lett.* **90**, 056801 (2003)
4. A. Pouydebasque, L. Montes, J. Zimmermann, F. Balestra, D. Fraboulet, D. Mariolle, J. Gautier, F. Schopfer, V. Bouchiat and **L. Saminadayar**, « Electron transport in silicon nanostructures based on ultra-thin SOI », *J. Phys. IV France* **12**, Pr3-97 (2002)
5. W. Rabaud, **L. Saminadayar**, C. Bäuerle, K. Hasselbach, A. Benoît, D. Mailly and B. Etienne, « Persistent Currents in a network of connected mesoscopic rings », in *Towards the Controllable Quantum States*, Hideaki Takayanagi and Junsaku Nitta eds. (2003)
6. **L. Saminadayar**, W. Rabaud, D. Mailly, K. Hasselbach, A. Benoît, A. Wieck, D. Reuter and B. Etienne, « Persistent Currents in Mesoscopic Connected Rings », in *Electronic Correlations : From Meso- to Nano-Physics*, T. Martin, G. Montambaux and J. Trân Thanh Vân eds. (2002)
7. W. Rabaud, **L. Saminadayar**, D. Mailly, K. Hasselbach, A. Benoît and B. Etienne, « Persistent Currents in Mesoscopic Connected Rings », *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3124 (2001)
8. **L. Saminadayar**, D. C. Glatli, Y. Jin and B. Etienne, « Observation of Fractionally Charged Quasiparticles », in *Quantum Physics at Mesoscopic Scale*, C. Glatli, M. Sanquer and J. Trân Thanh Vân eds. (2000)
9. M. Reznikov, R. de Picciotto, M. Heiblum, D. C. Glatli, A. Kumar and **L. Saminadayar**, « Quantum Shot Noise », *Superlattices and Microstructures* **23**, 901 (1998)
10. **L. Saminadayar**, D. C. Glatli, Y. Jin and B. Etienne, « Observation of the  $e/3$  Fractionally Charged Laughlin Quasiparticles », *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2526 (1997)
11. **L. Saminadayar**, D. C. Glatli, Y. Jin and B. Etienne, « Observation of the  $e/3$  Fractionally Charged Quasiparticles », *Physica B* **249**, 401 (1998)
12. A. Kumar, **L. Saminadayar**, D. C. Glatli, Y. Jin and B. Etienne, « Experimental Test of the Quantum Shot Noise Reduction Theory », *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2778 (1996)
13. A. Kumar, **L. Saminadayar**, D. C. Glatli, Y. Jin and B. Etienne, « Measurement of reduced shot noise in a quantum point contact », *Physica B* **227**, 161 (1996)
14. D. C. Glatli, A. Kumar, **L. Saminadayar**, Y. Jin and B. Etienne, « Observation of the Quantum Shot Noise Reduction », in *Correlated Fermions and Transport in Mesoscopic Systems*, T. Martin, G. Montambaux and J. Trân Thanh Vân eds. (1996)
15. **L. Saminadayar**, A. Kumar, D. C. Glatli, Y. Jin and B. Etienne, « Reduction of Shot Noise in Quantum Conductors », *J. Phys. IV France* **9**, 23 (1999)
16. D. C. Glatli, P. Jacques, A. Kumar, P. Pari and **L. Saminadayar**, « A Noise Detection Scheme with 10 mK Noise Temperature Resolution for Single Electron Tunneling Devices », *J. Appl. Phys.* **81**, 7350 (1997)

17. J. Y. Duboz, **L. Saminadayar** and J. M. Gérard, « Effect of asymmetric barriers on performances of GaAs/AlGaAs quantum well detectors », *J. Appl. Phys.* **78**, 2803 (1995)

### Publications dans des revues « grand public »

1. **L. Saminadayar**, « Le bruit des charges fractionnaires », *Pour la Science* **289**, 30 (2001)
2. D. C. Glatli et **L. Saminadayar**, « Observation de quasi-particules de charge fractionnaire  $e/3$  », *Images de la physique 1999*, p. 8-14 (2000)
3. **L. Saminadayar**, « Fondamentalement pragmatique », *Le Monde de l'Éducation* **261**, 78 (1998)
4. D. C. Glatli, **L. Saminadayar** et Y. Jin, « Un tiers d'électron », *Pour la Science* **241**, 24 (1997)

### Publications diverses

- Charles L. Kane and Matthew P. A. Fisher, « A shot in the arm for fractional charge », *Nature* **389**, 119 (1997)
- Graham P. Collins, « Fractionally Charged Quasiparticles Signal Their Presence with Noise », *Physics Today* **50**, 11, 17 (1997)
- David Ehrenstein, « Slicing an Electron's charge into three », *Science* **277**, 1766 (1997)
- Alison Goddard, « Fractional charge carriers discovered », *Physics World* **10**, 10, 9 (1997)
- Charles Seife, « Reduced charge », *New Scientist* **2099**, 10 (1997)
- Phillip F. Schewe and Ben Stein, « Fractionally charged carriers have been detected experimentally for the first time », *Physics News Update* **335** (1997)
- Caroline Brillon, « L'électron se coupe en trois », *Sciences et Avenir* **609**, 116 (1997)
- « La charge de l'électron n'est plus élémentaire », *La Recherche* **303**, 16 (1997)